Carlo Càssola

Geometria solida per le gare di matematica

Teoremi, tecniche e problemi

scienza express edizioni

6. Tetraedri

Il tetraedro è la piramide più semplice, avendo come base il poligono con il minor numero di lati possibile; d'altra parte è anche il poliedro col più piccolo numero di facce, di spigoli e di vertici; ed è l'unica piramide in cui tutte le facce siano triangoli. Non c'è dunque da stupirsi se esiste una ricchissima nomenclatura di tetraedri particolari[1], una raccolta quasi interminabile di proprietà caratteristiche, e naturalmente una formidabile casistica di esercizi e problemi. Secondo il matematico canadese Ross Honsberger (1929-2016), che si è occupato regolarmente anche di competizioni matematiche, "solid geometry pays as much attention to the tetrahedron as plane geometry does to the triangle. Yet many elementary properties of the tetrahedron are not very well known"[2].
Vedremo ora alcuni casi rilevanti nell'ambito delle competizioni.

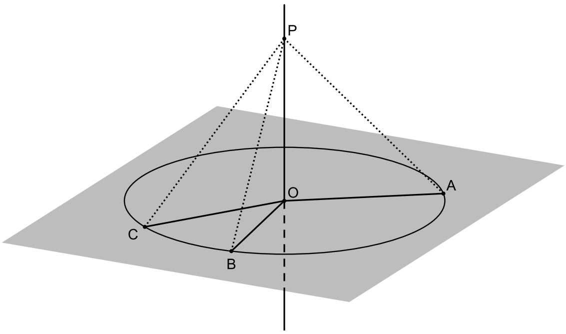
[1] Lo studente non è tenuto a conoscere a memoria la nomenclatura; infatti in tutti i quesiti, dalle gare di livello base a quelle più avanzate, non sono mai (o quasi mai) usati i termini che verranno esposti in questo capitolo, bensì le proprietà dei tetraedri particolari. Ad esempio, non viene mai chiesto di "dimostrare che un tetraedro è ortocentrico" ma di "dimostrare che un tetraedro ha le coppie di spigoli opposti a due a due perpendicolari", che è in effetti una delle possibili definizioni di tetraedro ortocentrico. La conoscenza delle definizioni e delle proprietà dei tetraedri particolari, d'altra parte, può aiutare a inquadrare molto più velocemente e semplicemente una vasta gamma di esercizi.

[2] "La geometria solida dedica altrettanta attenzione al tetraedro quanto la piana al triangolo. Ciononostante molte proprietà elementari del tetraedro non sono molto conosciute" (Honsberger 1976, pag. 90).

Lemma 6.1. Dati quattro punti dello spazio non complanari, a tre a tre non allineati, esiste ed è unica la superficie sferica passante per essi. Ne consegue che un tetraedro non degenere può essere sempre inscritto in una sfera. Il centro della sfera è il punto di intersezione delle rette perpendicolari a ciascuna faccia e passanti per il relativo circocentro.

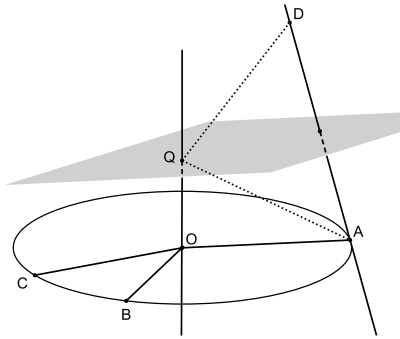
Esempio 6.1. ** Dimostrare il lemma 6.1

Soluzione. Si prendano tre dei quattro punti dati; siano ad esempio A, B e C. Per una proprietà elementare, A, B e C sono sicuramente complanari (si ricordi che non possono essere allineati); sia α il piano che li contiene. Si tracci in α la circonferenza che passa per i tre punti: il suo centro sarà il circocentro O del triangolo ABC (Geometria piana, teorema 5.7). Sia r la retta perpendicolare ad α e passante per O.

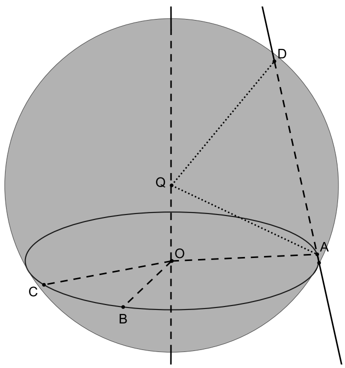


Lemma 1: la retta r è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A, B e C. Dimostrazione: dato un punto P qualsiasi di r non coincidente con O, i triangoli AOP, BOP e COP sono tutti e tre rettangoli in O (teorema 1.1); ma essi sono anche congruenti fra loro, perché rettangoli, aventi il segmento PO in comune, e $AO = BO = CO$ in quanto raggi di una medesima circonferenza[3]. Pertanto $AP = BP = CP$ per ogni punto P di r.
Si prenda ora il quarto punto dell'insieme di partenza, D; si vuole disegnare su r un punto Q equidistante da A e da D.
Lemma 2: il punto Q esiste ed è unico. Dimostrazione del lemma 2: il punto Q è l'intersezione fra il piano β, luogo dei punti dello spazio equidistanti da A e D (lemma 1.18), e la retta r. L'esistenza di Q è garantita dal fatto che β non può essere parallelo alla retta r; infatti β potrebbe essere parallelo a r soltanto se il punto D appartenesse al piano α. Ciò è però da escludersi, perché va contro l'ipotesi che vede i punti A, B, C e D non complanari.

[3]Primo criterio di congruenza.



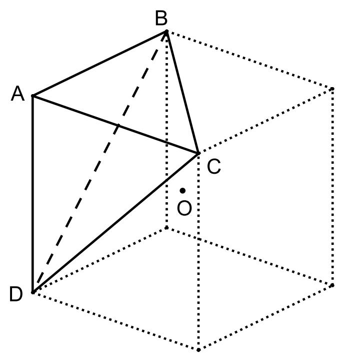
Dato che Q appartiene a r, i segmenti QA, QB e QC sono congruenti fra loro per il lemma 1, e congruenti anche a QD per il lemma 2. Il punto Q è equidistante da A, B, C e D e pertanto è il centro della sfera passante per A, B, C e D.



Essendo stato costruito come punto di intersezione fra una retta e un piano non paralleli, Q è anche unico: dunque esiste ed è unica la sfera per A, B, C e D, come si voleva dimostrare. □

Esempio 6.2. In un tetraedro una faccia è un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$; i restanti spigoli sono lunghi 1. Trovare il raggio della sfera circoscritta al tetraedro.

Soluzione. Il problema può essere risolto, senza eccessive difficoltà, con l'uso ripetuto del teorema di Pitagora (Geometria piana, teorema 2.1). Si può però percorrere una scorciatoia se ci si rende conto che i tre spigoli lunghi 1 concorrono in un vertice, formando a due a due in esso angoli retti (il tetraedro è rettangolo; si veda oltre, definizione 6.11). Il tetraedro si può dunque ricavare sezionando un cubo di lato 1 lungo il piano passante per tre suoi vertici (B, C e D nella figura):



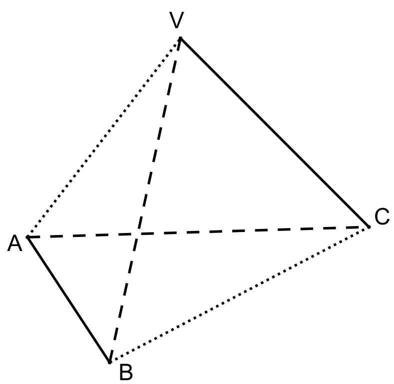
Il raggio della sfera circoscritta al tetraedro coincide perciò con il raggio della sfera circoscritta al cubo, e pertanto vale metà della sua diagonale, e cioè $\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Definizione 6.2. Un tetraedro si dice *isoscele*[4] se i suoi spigoli opposti sono a due a due congruenti.

Il tetraedro isoscele ha diverse proprietà interessanti:

Esempio 6.3. Provare che un tetraedro è isoscele se e solo se le sue facce sono congruenti.

Soluzione. Supponiamo che il tetraedro sia isoscele: dette a, b e c le lunghezze di ciascuna delle coppie dei sei spigoli del tetraedro (definizione 6.2), risulta chiaro che ciascuna faccia è delimitata da lati di lunghezza a, b e c (in figura le coppie sono rappresentate con segmento continuo, tratteggiato e puntinato).

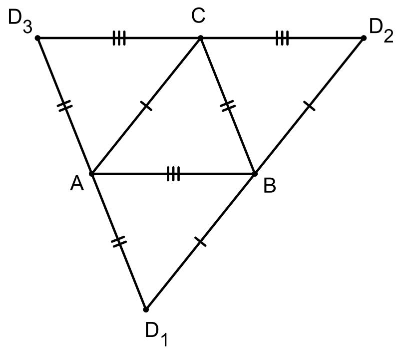


[4]Il tetraedro isoscele è talvolta chiamato anche *disfenoide*, *sfenoide*, *bisfenoide*, *tetraedro equifacciale* (per questa definizione si veda l'esempio 6.3), *tetraedro quasi regolare*, *tetramonoedro*.

Pertanto le quattro facce hanno gli stessi lati, e quindi sono congruenti per il terzo criterio. Viceversa, se le facce sono tutte fra loro congruenti, banalmente il tetraedro è isoscele. □

Esempio 6.4. Dimostrare che un tetraedro è isoscele se e solo se la somma dei tre angoli piani uscenti da ciascun vertice è pari a un angolo piatto.

Soluzione. Supponiamo che il tetraedro sia isoscele (definizione 6.2): detti allora α, β e γ gli angoli di una faccia, è immediato constatare che in ciascun vertice del tetraedro si incontrano tre angoli piani aventi ampiezze α, β e γ (si veda l'esempio 6.3). Ma essendo la somma degli angoli interni di un triangolo pari ha un angolo piatto (Geometria piana, teorema 3.2), la richiesta è dimostrata. Viceversa, sia pari a un angolo piatto la somma degli angoli che si incontrano in un vertice. Detto $ABCD$ il tetraedro, si sviluppi la sua superficie tagliando lungo i tre spigoli uscenti da D: la figura ottenuta sarà un triangolo, perché ogni terna di angoli ai vertici A, B e C è per ipotesi pari a 180°.



I punti A, B e C sono i punti medi dei lati del triangolo $D_1D_2D_3$, perché le coppie di segmenti uscenti da A, B e C sono in realtà lo stesso segmento lungo cui è avvenuto il taglio. Ciò è sufficiente per concludere che il triangolo $D_1D_2D_3$ è diviso in quattro triangoli congruenti, e quindi il tetraedro è isoscele (grazie a quanto dimostrato nell'esempio 6.3). □

Lemma 6.3. Come conseguenza di quanto appena dimostrato: lo sviluppo piano di un tetraedro qualsiasi è in generale un esagono (convesso o concavo); lo sviluppo piano di un tetraedro isoscele è un triangolo.

Lemma 6.4. In un vertice di un poliedro concorrono tre facce. Considerati i tre angoli piani che si incontrano in tale vertice, si ha che ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Esempio 6.5. (*USAMO*[5]*, 1972; Olimpiadi nazionali Taiwan 1997*)
Un tetraedro ha spigoli opposti uguali. Dimostrare che tutte le sue facce sono triangoli acutangoli.[6]

Soluzione. Per ipotesi il tetraedro è isoscele (definizione 6.2). Supponiamo per assurdo che uno degli angoli di una faccia sia ottuso: detto angolo, per il lemma 6.4, dev'essere minore della somma degli altri due angoli. Allora la somma dei tre angoli che si incontrano in quel vertice deve essere maggiore di un angolo piatto; ma ciò è impossibile perché il tetraedro è isoscele (esempio 6.4). □

Lemma 6.5. Le tre altezze di un tetraedro isoscele sono congruenti. Infatti le sue facce sono congruenti (esempio 6.3) e quindi fra loro equivalenti. Pertanto è possibile calcolare il volume del tetraedro (tabella I) rispetto a una qualsiasi delle sue facce considerata come base. Essendo uguali le aree delle quattro facce, le quattro relative altezze devono a loro volta essere congruenti.

Nel capitolo dedicato ai problemi saranno presentati altri risultati riguardanti il tetraedro isoscele (problemi 5, 20, 58, 69).
Un'altra definizione molto importante è la seguente:

Definizione 6.6. Un tetraedro in cui gli spigoli opposti sono a due a due perpendicolari è detto *tetraedro ortocentrico*[7] (per l'angolo formato da due rette sghembe si veda la definizione 1.3).

Esempio 6.6. ** (*Olimpiadi nazionali Gran Bretagna, 1978*)
Dimostrare che le quattro altezze di un tetraedro sono concorrenti se e solo se ciascuno spigolo del tetraedro è perpendicolare allo spigolo opposto.[8]

Soluzione. Si inizi con la dimostrazione del seguente lemma: due spigoli opposti di un tetraedro sono perpendicolari se e solo se le due coppie di altezze del tetraedro uscenti dai vertici di ciascuno degli spigoli sono a due a due complanari.

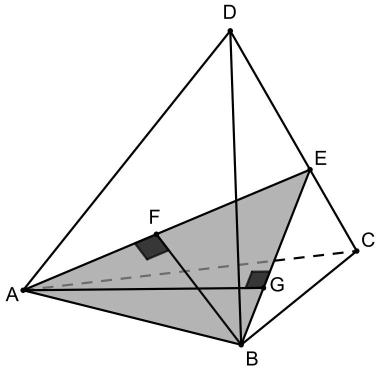
---

[5] *United States of America Mathematical Olympiad*, gara nazionale degli Stati Uniti, nata nel 1972. Fin da quando è stata istituita, la competizione ha rappresentato la fase finale dell'*American Mathematics Competition*, citata agli esempi 3.1 e 9.1 e al problema 8.

[6] L'esercizio assegnato alle olimpiadi taiwanesi aveva questo come quesito a; il quesito b è presentato più oltre (problema 20).

[7] O anche *tetraedro ortogonale* o *tetraedro normale*.

[8] Questa proprietà è il motivo per cui il tetraedro con gli spigoli opposti a due a due perpendicolari prende il nome di ortocentrico: solo in questo tipo di tetraedro le altezze concorrono, e il loro punto di intersezione è l'*ortocentro* del tetraedro. Si veda la definizione 6.7.



Si inizi con l'ipotesi che siano perpendicolari gli spigoli AB e CD: si vuole dimostrare che le due altezze uscenti da A e da B sono fra loro complanari, e che lo sono altresì le altezze uscenti da C e D. Si conduca per lo spigolo AB il piano α perpendicolare a CD: esso incontrerà CD in E. Il piano α così costruito è perpendicolare sia alla faccia ACD sia alla faccia BCD del tetraedro (lemma 1.14). Dunque tanto l'altezza del tetraedro uscente da A quanto quella uscente da B (in figura indicate con AG e BF) appartengono al piano α, e pertanto sono complanari. Identica costruzione si può fare per dimostrare che sono complanari le due altezze del tetraedro uscenti da C e da D. Viceversa, se le altezze uscenti da A e da B sono complanari, il piano che le contiene è perpendicolare sia al piano della faccia ACD sia al piano della faccia BCD; e quindi è perpendicolare anche alla retta intersezione di tali facce, CD (lemma 1.15). Ma allora per il teorema 1.4 le rette AB e CD risultano perpendicolari. Con ciò il lemma è dimostrato.
Ora la dimostrazione dell'esercizio è semplice: supponiamo che le altezze del tetraedro siano tutte concorrenti: questo implica che le tre coppie di spigoli opposti siano a due a due perpendicolari, e perciò il tetraedro è ortocentrico. Viceversa, se il tetraedro è ortocentrico, ciascuna delle altezze incontra le altre tre in un punto. Si danno due possibili casi: nel primo, se i punti di intersezione delle altezze a due a due sono fra loro distinti, allora le altezze sono tutte complanari; ma ciò è impossibile perché sarebbero complanari anche i quattro vertici del tetraedro. Deve dunque verificarsi il secondo caso, e cioè le altezze si incontrano tutte nel medesimo punto, che è quanto si doveva dimostrare. □

Definizione 6.7. Il punto di intersezione fra le altezze di un tetraedro ortocentrico è l'*ortocentro* del tetraedro.

Oltre agli esempi presenti in questo capitolo, ulteriori risultati relativi al tetraedro ortocentrico si possono trovare più avanti, esempi 12.4 e 12.5.

Lemma 6.8. Un tetraedro qualunque può sempre essere inscritto in un parallelepipedo[9] (in generale non rettangolo), in modo che ogni spigolo del tetraedro sia una diagonale di una delle facce del parallelepipedo (si ricordi che due spigoli opposti di un tetraedro appartengono sempre a due rette sghembe, e che per due rette sghembe passa una coppia di piani paralleli, come visto al lemma 1.10). Si danno i seguenti casi:

- Il tetraedro inscritto è isoscele se e solo se il parallelepipedo è rettangolo: infatti le diagonali di un rettangolo sono congruenti, e gli spigoli opposti del tetraedro risultano a due a due congruenti.
- Il tetraedro inscritto è ortocentrico se e solo se le facce del parallelepipedo sono rombi[10]. Ciò segue dal fatto che due spigoli opposti sono diagonali di due facce congruenti (parallelogrammi) del parallelepipedo; ma se le due diagonali sono perpendicolari, allora il parallelogramma è un rombo (Geometria piana, teorema 8.1).
- Il tetraedro inscritto è sia ortocentrico sia isoscele se e solo se il parallelepipedo in cui esso è inscritto è contemporaneamente un parallelepipedo e un romboedro, e cioè è un cubo. Evidentemente, un tetraedro ortocentrico e isoscele è un tetraedro regolare (si veda il capitolo 11 dedicato ai poliedri regolari).

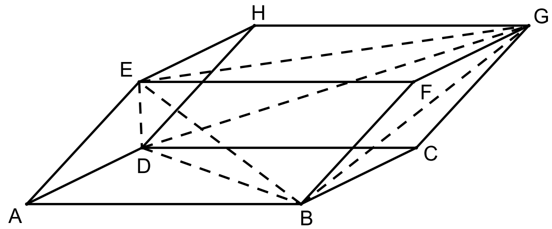
Moltissimi esercizi sui tetraedri si possono risolvere in modo semplice ed elegante utilizzando il parallelepipedo circoscritto. Si vedano gli esempi 6.8, 6.9, 12.4, 12.5 e i problemi 30, 33, 50, 58 e 69.

Esempio 6.7. Dimostrare che il volume di un tetraedro è pari a un terzo del volume del parallelepipedo a esso circoscritto.

Soluzione. Il volume di un parallelepipedo qualsiasi (non necessariamente rettangolo), presa una qualsiasi delle sue facce come base, è pari ad $A_b \cdot h$, dove A_b è l'area della faccia scelta come base e h è la lunghezza dell'altezza relativa a tale base. Si considerino il parallelepipedo $ABCDEFGH$ e il tetraedro $BDEG$ in esso inscritto (lemma 6.8):

[9] In questo frangente si considerano tetraedri i cui spigoli sono diagonali delle facce del parallelepipedo; più avanti (esempio 6.10 e lemma 6.10) saranno considerati anche tetraedri i cui vertici appartengano a punti interni degli spigoli di un parallelepipedo; o tetraedri i cui spigoli coincidano con spigoli del parallelepipedo (definizione 6.11).

[10] In questo caso il parallelepipedo è un *romboedro*. Per le caratteristiche e le proprietà di un romboedro si veda oltre, definizione 12.3.



Il tetraedro $BDEG$ individua nel parallelepipedo altri quattro tetraedri: $ABDE$, $BCDG$, $BEFG$ e $DEGH$. Vogliamo dimostrare che il volume di uno qualunque di essi è un sesto di quello del parallelepipedo. Si prenda ad esempio $ABDE$, considerato sulla sua base ABD; l'area di ABD è metà della base $ABCD$ del parallelepipedo, mentre l'altezza del tetraedro $ABDE$ è la stessa del parallelepipedo (ciò vale palesemente anche se il parallelepipedo non è rettangolo). Pertanto il volume di $ABDE$ è (si veda la tabella I): $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\mathcal{A}_{ABCD}\cdot h\right)$, cioè un sesto del volume del parallelepipedo. Si dimostra agevolmente che lo stesso rapporto vale anche per i tetraedri $BCDG$, $BEFG$ e $DEGH$. Detto dunque $\mathcal{V}$ il volume del parallelepipedo, si ha che il volume tetraedro di partenza, $BDEG$, è pari a $\mathcal{V} - 4\cdot\frac{1}{6}\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{V}$, che è quanto si voleva dimostrare. □

Esempio 6.8. (*Crux Mathematicorum*[11]*, vol. 1, n. 10, dicembre 1975*)
In un tetraedro, due coppie di spigoli opposti sono perpendicolari; dimostrare che gli spigoli opposti della terza coppia sono necessariamente anch'essi perpendicolari.

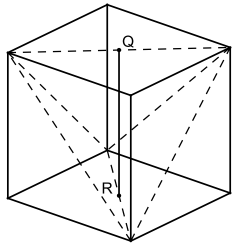
Soluzione. L'obiettivo è dimostrare che il tetraedro è ortocentrico. Siano dunque perpendicolari due coppie di spigoli opposti del tetraedro; si inscriva il tetraedro in un parallelepipedo. Si ha che due coppie di facce opposte del parallelepipedo sono rombi, aventi spigoli tutti fra loro congruenti. Ma allora tutti gli spigoli del parallelepipedo sono necessariamente congruenti, e quindi anche le facce opposte della terza coppia, avendo lati congruenti, sono rombi (Geometria piana, teorema 8.1). Essendo rombi, le due facce hanno le diagonali perpendicolari; perciò anche gli spigoli opposti della terza coppia sono perpendicolari, e il tetraedro è ortocentrico (definizione 6.6). □

Definizione 6.9. I segmenti che congiungono i punti medi di due spigoli opposti di un tetraedro sono detti *bimediane*.

[11] Rivista pubblicata dalla Canadian Mathematical Society, nata nel 1975, specializzata in quesiti rivolti a studenti delle scuole superiori e universitari.

Esempio 6.9. Provare che le bimediane di un tetraedro regolare concorrono[12].

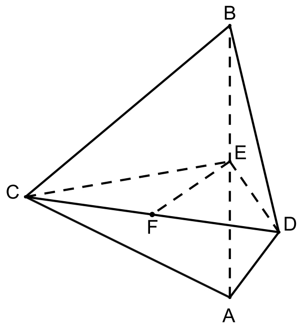
Soluzione. Un tetraedro regolare può essere inscritto in un cubo (lemma 6.8). Pertanto i punti medi di due spigoli opposti del tetraedro coincidono con i centri di due facce opposte del cubo (ad esempio i punti Q e R in figura).



Le bimediane del tetraedro sono i segmenti congiungenti a due a due i centri di una coppia di facce opposte del cubo, che concorrono nel centro del cubo. □

Esempio 6.10. (*Gara a squadre Summer Math Camp*[13]*, 2014*)
In un tetraedro due spigoli opposti hanno la stessa lunghezza (18 cm) e sono tra di loro perpendicolari. I due spigoli sono anche entrambi perpendicolari ad un segmento di lunghezza 81 cm i cui vertici sono i punti medi dei due spigoli. Trova il volume del tetraedro in cm^3.

Soluzione. Si noti che nella figura le proporzioni non sono rispettate.



[12]L'esercizio è un caso particolare di una proprietà molto più generale: le bimediane infatti concorrono in qualunque tetraedro, e il loro punto di incontro (il *baricentro* del tetraedro) biseca ciascuna di esse. Si veda oltre, definizione 6.15; e Court 1964, pag. 54.

[13]Il *Summer Math Camp* è un campo estivo dedicato a matematica, giochi e vita all'aria aperta organizzato annualmente dalla Mathesis di Udine.

Prima soluzione: il tetraedro $ABCD$ è formato da due piramidi congruenti a base triangolare CDE (a loro volta, quindi, due tetraedri): $CDEB$ e $CDEA$. La base di ciascuno di essi ha area

$$\frac{CD \cdot EF}{2} = \frac{18 \cdot 81}{2} = 729\,;$$

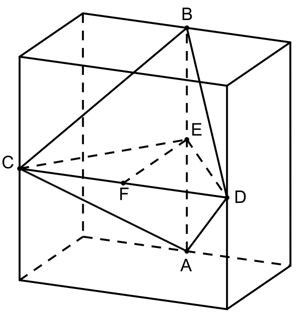
l'altezza di ciascuna delle due piramidi rispetto alla base CDE è $BE = EA = 9$. Il volume totale (si veda la tabella I) è

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 729 \cdot 9 = 4374\,.$$

Seconda soluzione: per prima cosa dimostriamo che $AC = AD = BC = BD$. Osserviamo che il piano individuato dai punti C, D, E è perpendicolare al segmento AB (teorema 1.4), in quanto AB è perpendicolare tanto alla bimediana EF (la cui lunghezza è la distanza fra le due rette sghembe AB e CD, definizione 1.11) quanto a CD per ipotesi. Il triangolo CDE è isoscele sulla base CD perché in esso la mediana EF coincide con l'altezza (Geometria piana, teorema 5.9); ne segue che $CE = ED$. Pertanto i triangoli CEB, DEB, AEC, AED sono tutti congruenti, perché sono tutti rettangoli in D, $BE = EA$ e $CE = ED$[14]. Calcoliamo ora $AC = AD = BC = BD$: nel triangolo CFE, retto in F, si ottiene col teorema di Pitagora (Geometria piana, teorema 2.1) che $CE = 9\sqrt{10}$; sempre con Pitagora, nel triangolo BCE retto in E, si calcola che $BC = 9\sqrt{11}$. Perciò $AC = AD = BC = BD = 9\sqrt{11}$. Il tetraedro $ABCD$ è dunque isoscele (definizione 6.2), dato che ha spigoli opposti congruenti. Ma un tetraedro può essere sempre inscritto in un parallelepipedo avente diagonali di lunghezza pari alla lunghezza dei suoi spigoli (lemma 6.8). In questo caso, essendo il tetraedro isoscele, il parallelepipedo è rettangolo (si osservi che il tetraedro non è ortocentrico perché solo una coppia di suoi spigoli opposti sono perpendicolari; si veda l'esempio 6.8). Di questo tetraedro sono note le diagonali di ciascuna delle facce: quattro di esse valgono $9\sqrt{11}$, le altre due sono lunghe 18. A questo punto è possibile calcolare gli spigoli del parallelepipedo e da questi il suo volume (tabella I); il tedioso conto viene qui omesso. Infine, in base al risultato dell'esempio 6.7, basterà dividere il volume del parallelepipedo per tre.
Terza soluzione: il tetraedro $ABCD$ può essere inscritto[15] in un parallelepipedo secondo le modalità descritte dalla figura alla pagina successiva. Gli spigoli di questo parallelepipedo sono congruenti a $CD = 18$, ad $AB = 18$ e ad $EF = 81$.

[14] Primo criterio di congruenza.

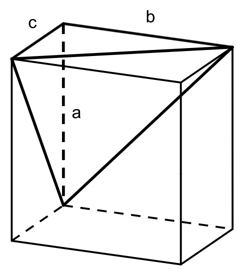
[15] Si osservi che qui l'espressione ha significato diverso rispetto a quanto descritto nel lemma 6.8, dove era necessario che i vertici del tetraedro coincidessero con vertici del parallelepipedo.



Il volume del parallelepipedo (tabella I) è perciò $18 \cdot 18 \cdot 81 = 26224$. Il volume del tetraedro $ABCD$ è un sesto di quello del parallelepipedo: infatti $ABCD$ è formato da due tetraedri, $CDEB$ e $CDEA$, aventi ciascuno base equivalente alla metà della base del parallelepipedo e altezza pari a metà di quella del parallelepipedo; tenendo conto del fattore $1/3$ nel calcolo del volume della piramide (tabella I), il rapporto è evidente. Il volume cercato è $26224/6 = 4374$. □

Lemma 6.10. Il risultato ottenuto nella terza soluzione dell'esempio 6.10 ha validità generale: un tetraedro che abbia una coppia di spigoli opposti perpendicolari può essere inscritto in un parallelepipedo che ha due spigoli di lunghezza pari ai due spigoli dati, e come terzo spigolo la distanza fra di essi. Il volume del tetraedro è un sesto di quello del parallelepipedo.

Definizione 6.11. Se in un vertice di un tetraedro si incontrano tre angoli retti, il tetraedro si dice *tetraedro rettangolo*[16]. Un siffatto tetraedro può essere inscritto in un parallelepipedo rettangolo avente un vertice coincidente con il vertice del tetraedro contenente gli angoli retti. Il volume del tetraedro è un sesto di quello del parallelepipedo (si veda anche l'esempio 6.2).



[16] O anche *tetraedro trirettangolo*. Esiste il tetraedro *quadrirettangolo*, in cui tutte e quattro le facce sono triangoli rettangoli; ma ovviamente gli angoli retti non si incontrano tutti al medesimo vertice (si veda oltre, lemma 11.1).