2. Conteggi senza ripetizioni

2.1 Permutazioni semplici

Affrontiamo il problema dell'Esempio 1.3. La questione è quella di vedere in quanti modi si possono ordinare totalmente, ossia mettere in fila, i 14 studenti. Più in generale, si pone il seguente

Problema 2.1. *In quanti modi si possono ordinare totalmente gli elementi di un n-insieme?*

Definizione 2.2. Dato un n-insieme E, si dice sua *permutazione (semplice)* ciascuno dei possibili modi di ordinare totalmente i suoi elementi, cioè ogni n-pla ottenuta con essi in modo da usarli tutti, ossia ogni applicazione suriettiva di $E(n)$ su E.

Esempio 2.1. Se è $E = \{a, b, c\}$, le possibili permutazioni sono 6 e cioè:

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Il nostro problema può dunque essere così riformulato:

Problema 2.3. *Quante sono le permutazioni di un insieme E di n elementi?*

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n; indichiamolo con P_n. Si ha immediatamente:

$$P_1 = 1; \quad P_2 = 2P_1 = 2.$$

Proviamo che, più in generale, se è $n \geq 2$, si ha:

$$P_n = nP_{n-1}.$$

Scegliamo un elemento a come capofila: n possibilità. Ciò fatto, ci resta da ordinare gli altri elementi di E che sono $n-1$ e che, pertanto, possono essere ordinati in P_{n-1} modi diversi. Quindi, ad ogni $a \in E$ è associato un insieme A con P_{n-1} elementi. Siamo perciò nelle ipotesi del Teorema 1.10, dal quale segue subito la nostra tesi.
In conclusione, per $n > 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} P_n &= nP_{n-1} = n(n-1)P_{n-2} = \ldots = \\ &= n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot P_1 = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Si ammette poi, per motivi di comodità, che sia $P_0 = 1$, ossia che ci sia un unico modo di ... ordinare l'insieme vuoto.

Definizione 2.4. Dato un numero naturale positivo n, si chiama *fattoriale di n* o *n-fattoriale* il prodotto dei primi n numeri naturali positivi, accettando il valore 1 per $n = 1$. Il fattoriale del numero n si indica con il simbolo $n!$. Si definisce inoltre, per comodità, $0! = 1$.

È dunque, per definizione:

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{se è } n = 0 \text{ o } n = 1, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n, & \text{se è } n > 1. \end{cases}$$

Si ha, ovviamente: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.
Anzi, si vede subito che il fattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, con la condizione iniziale $0! = 1$.
Si conclude così col seguente:

Teorema 2.5. *Le possibili permutazioni di un n-insieme sono $n!$.*[1] □

Come si è detto, il numero P_n, ossia il numero delle applicazioni biiettive di $E(n)$ in un n-insieme E, non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi E ed $E(n)$, ma solo da n. Si conclude che, se si tiene conto della Definizione 1.6 sull'applicazione vuota, il Teorema 2.5 è equivalente al

[1] Ridimostriamo il teorema utilizzando il *Principio di Induzione*
Dimostrazione. Per $n = 0$ e $n = 1$, la tesi è ovvia. Supponiamola vera per $n-1$ e proviamola per n. Scegliamo un elemento $a \in E$ da collocare al primo posto: n possibilità; gli altri $n-1$ elementi possono essere ordinati, per ipotesi induttiva, in $(n-1)!$ modi. Per il Teorema 1.10, si ha che i possibili ordinamenti di E sono $n(n-1)! = n!$. □

Teorema 2.6. *Le applicazioni biiettive di un n-insieme A su un n-insieme B sono* $n!$. □

Quanto all'Esempio 1.3, si ricava che le liste possibili sono

$$P_{14} = 14! = 87\,178\,291\,200.$$

Esempio 2.2. Quanti sono i possibili anagrammi della parola *bacile* che non cominciano con a?

Dato che la parola in esame ha le lettere tutte distinte, i suoi anagrammi sono tanti quante le permutazioni di un insieme di 6 oggetti, ossia $6! = 720$. Da tale numero bisogna però togliere quello degli anagrammi che cominciano con a. Questi sono tanti quanti i possibili modi di ordinare, dopo a, le altre 5 lettere, ossia $5! = 120$. Il numero cercato è dunque $720 - 120 = 600$.
Si può anche procedere in modo più diretto: la prima lettera può essere scelta in 5 modi; poi basta allineare le altre 5 lettere; si ottiene il numero $5 \times 5! = 600$.
(Tutto ciò, naturalmente, se si prescinde dal fatto che le "parole" ottenute abbiano un qualche significato nella lingua italiana; in caso contrario, bisogna munirsi di un buon vocabolario e controllarle una per una, ma questo è un altro paio di maniche!)

Diamo qui di seguito, a titolo di esempio, i valori di $n!$ per i primi numeri naturali:

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
0, 1	1	6	720	11	39 916 800
2	2	7	5 040	12	479 001 600
3	6	8	40 320	13	6 227 020 800
4	24	9	362 880	14	87 178 291 200
5	120	10	3 628 800	15	1 307 674 368 000

Tabella 2.1: Fattoriali

Basta un rapido sguardo alla Tabella 2.1 per rendersi conto che i valori di $n!$ crescono molto rapidamente (il simbolo $n!$ vuole proprio esprimere la meraviglia di fronte a una simile rapidità). In effetti, i valori della funzione $n!$ crescono più rapidamente non solo di quelli di qualunque potenza (n^2, n^3, ...), ma addirittura di quelli delle funzioni esponenziali (10^n, 100^n, ...). Si può infatti provare, ma non è questa la sede per farlo, che si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^r} = +\infty, \text{ per ogni intero positivo } r$$

e anche:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \text{ per ogni numero reale } a > 0.$$

Ricordiamo ancora un importante risultato molto utile in Analisi Matematica:[2]

Teorema 2.7 (Formula di Stirling)**.** *Si ha:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.}$$

Per concludere, diamo ancora la seguente

Definizione 2.8. Dato un numero naturale positivo n, si chiama suo *semifattoriale* il prodotto dei numeri naturali positivi minori o uguali a n che hanno la sua stessa parità, accettando il valore 1 per $n = 0$ e $n = 1$. Tale numero si indica con $n!!$.

È dunque, per definizione,

$$n!! := \begin{cases} 1, & \text{se è } n = 0 \text{ o } n = 1, \\ 2, & \text{se è } n = 2, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{se } n \text{ è dispari e maggiore di } 1, \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-2) \cdot n, & \text{se } n \text{ è pari e maggiore di } 2. \end{cases}$$

Si ha ovviamente: $(n+2)!! = (n+2) \cdot n!!$.
Anzi, si vede subito che il semifattoriale di un numero naturale può essere definito per ricorrenza dall'uguaglianza $(n+2)!! = (n+2) \cdot n!!$, con le condizioni iniziali $0!! = 1!! = 1$.
Per $n > 0$, sussiste poi l'uguaglianza: $n! = n!! \cdot (n-1)!!$.

Esempio 2.3. Si ha:

$$10!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840;$$
$$9!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945;$$
$$10!! \times 9!! = 3840 \times 945 = 3\,628\,800 = 10!.$$

Analogamente alla formula di Stirling, sussiste il seguente risultato:

Teorema 2.9 (Formula di Wallis)**.** *Si ha:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{\pi n}} = 1.}$$

[2] Per una dimostrazione di questo teorema, e del successivo, si veda per esempio il libro [2], p. 558–860.

Esercizi

Esercizio 2.1. Quanti sono i numeri formati da cinque cifre dispari distinte? E quelli formati da cinque cifre dispari distinte seguite da due cifre pari uguali?

Esercizio 2.2. In una lotteria collegata con una corsa ippica si devono abbinare sette biglietti, precedentemente estratti, ai sette cavalli in gara. Quanti sono i possibili abbinamenti?

Esercizio 2.3. Carlo disputa con cinque compagni, un torneo di tennis. Ciascuno di essi incontra una volta tutti gli altri. Quante sono le possibili classifiche finali nelle quali Carlo figura al secondo posto, se non ci sono "ex-aequo"? E se Aldo e Bruno ottengono, alla fine, lo stesso punteggio? Quanti incontri vengono disputati?

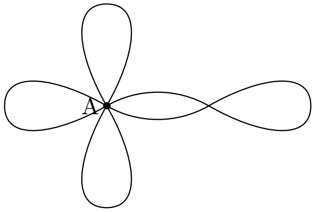

Figura 2.1

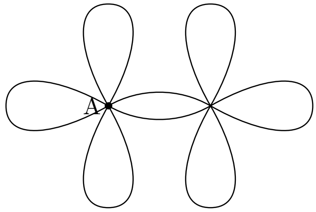

Figura 2.2

Esercizio 2.4. Due squadre di cinque concorrenti ciascuna partecipano a un torneo di equitazione. Quante sono le possibili classifiche individuali in cui si alternano elementi di una squadra con elementi dell'altra, se non ci sono "ex-aequo"?

Esercizio 2.5. Si considerino i grafi delle figure 2.1 e 2.2. In ognuno di essi si vuole partire da A e ritornare in A dopo aver percorso tutti i lati del grafo e una sola volta ciascuno. Quanti sono, nei due grafi, i possibili percorsi?

2.2 Classe di una permutazione

Questo Capitolo è una digressione rispetto al filo del discorso.[3]
Sia $E = \{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n\}$, con $n > 1$, un n-insieme. Pensando i suoi elementi assegnati in quest'ordine, si ottiene una delle $n!$ permutazioni di E che chiameremo π_0 e assumeremo come permutazione *fondamentale*. La indicheremo scrivendo $\pi_0 = (a_1,\ a_2, \ldots, a_n)$. Sia poi π un'altra permutazione di E.

[3]Può perciò essere tralasciato, almeno in una prima lettura, senza pregiudicare la comprensione del seguito.

Definizione 2.10. Diremo che in π due elementi a_i e a_j *fanno inversione* rispetto a π_0 [o, con abuso di linguaggio, che in π la coppia $(a_i,\ a_j)$ *fa inversione* rispetto a π_0] se l'ordine con cui compaiono in π è opposto a quello che hanno in π_0.

Esempio 2.4. Siano: $\pi_0 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ e $\pi = (3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 1)$. Le coppie che in π fanno inversione rispetto a π_0 sono: $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 3)$, $(4,\ 5)$; in tutto 6 coppie.

Per calcolare il numero delle coppie (*non ordinate!*)[4] che in π fanno inversione rispetto a π_0, basta vedere con quanti elementi fa inversione a_1, poi con quanti elementi diversi da a_1 fa inversione a_2, ..., con quanti elementi diversi da $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{k-1}$ fa inversione a_k, e così via. Si sommano poi i numeri ottenuti.
La permutazione che ha il maggior numero di coppie che fanno inversione è la $\pi^0 = (a_n,\ a_{n-1},\ \ldots, a_2,\ a_1)$, nella quale ogni coppia fa inversione. La π^0 è detta l'*opposta* di π_0. Dato che sono $n-k$ gli elementi diversi da $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{k-1}$, che fanno inversione con a_k, (con k che varia da 1 a n), si ha che il numero di tali coppie è dato da (cfr. Teorema 1.7):

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Da ciò si ricava, fra l'altro, che le coppie non ordinate di un insieme E di n elementi, ossia i sottoinsiemi di E formati da 2 elementi, sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ (cfr. Capitolo 2.4).
Il numero delle coppie che in π fanno inversione rispetto a π_0 coincide ovviamente col numero di quelle che in π_0 fanno inversione rispetto a π.

Definizione 2.11. Diremo che una permutazione π è di *classe pari* [*dispari*] rispetto a π_0 se è pari [dispari] il numero delle coppie che in π fanno inversione rispetto a π_0.

Esempio 2.5. Le permutazioni $\pi_1 = (1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4)$ e $\pi_2 = (4,\ 5,\ 2,\ 3,\ 1)$ sono fra loro opposte. Le coppie che in ciascuna di esse fanno inversione rispetto all'altra sono $\frac{5\times 4}{2} = 10$. Ciascuna di esse è dunque di classe pari rispetto all'altra; ciascuna di esse è poi di classe pari anche rispetto alla permutazione fondamentale $\pi_0 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, come è facile controllare. Per contro, la permutazione $\pi = (2,\ 1,\ 5,\ 3,\ 4)$ è di classe dispari rispetto a π_0.

Ovviamente, ogni permutazione è di classe pari rispetto a se stessa.
Le permutazioni di E vengono così ripartite da π_0 in due classi. Per esprimere il fatto che due date permutazioni appartengono alla medesima classe, diremo che esse hanno la *stessa parità* rispetto a π_0.

[4] Sarebbe quindi più corretto parlare di *ambi*.

Definizione 2.12. Diremo che in una permutazione π si effettua una *trasposizione* ogni volta che in essa si scambiano di posto due elementi (ottenendo così una nuova permutazione π'). Una trasposizione è detta *semplice* se è effettuata fra elementi consecutivi.

Teorema 2.13. *Se in una permutazione π si effettua una trasposizione, si ottiene una permutazione π' che appartiene all'altra classe.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che gli elementi a_i e a_j con i quali si effettua la trasposizione siano consecutivi. Se a_i e a_j facevano inversione in π, non la fanno più in π' e viceversa. Per contro, ogni altra coppia di elementi di E fa inversione nella nuova permutazione se e solo se la faceva in quella di partenza. Quindi passando da π a π', il numero delle coppie che fanno inversione varia esattamente di uno. In questo caso particolare, la tesi è raggiunta; passiamo a quello generale. Supponiamo che nella permutazione π gli elementi a_i e a_j occupino, rispettivamente, l'r-esimo e l's-esimo posto, e che sia $r < s$. Con $s - r$ trasposizioni semplici si porta a_j davanti ad a_i e poi, con $s - r - 1$ di tali trasposizioni, si porta a_i, che ora occupa il posto $(r + 1)$-esimo, ad occupare quello s-esimo, ottenendo così la permutazione π'. In tutto, sono state effettuate $2(s - r) - 1$ trasposizioni semplici. Dato che ad ogni passaggio la permutazione cambia classe ed essendo dispari il numero dei passi, si conclude che π e π' hanno parità diverse. □

Corollario 2.14. *Le permutazioni di classe pari sono tante quante quelle di classe dispari.*

Dimostrazione. Diciamo A l'insieme delle permutazioni di classe pari e B il suo complementare. Sia poi f la legge che ad ogni $a \in A$ associa quell'elemento di B che si ottiene trasponendo i primi due elementi di a. È immediato constatare che f è biiettiva. □

Teorema 2.15. *Ogni permutazione π si può ottenere da π_0 effettuando, una dopo l'altra, tante trasposizioni quante sono le coppie che in π fanno inversione.*

Dimostrazione. Data una permutazione π, invece di contare le trasposizioni che ci permettono di passare da π_0 a π, contiamo quelle che ci fanno passare da π a π_0. Se l'elemento a_1 occupa in π il k_1-esimo posto, ci sono esattamente $k_1 - 1$ (≥ 0) elementi che in π fanno inversione con a_1, ossia quelli che occupano i primi $k_1 - 1$ posti (se è $k_1 - 1 = 0$, vuol dire che l'elemento a_1 è già al suo posto!). Con $k_1 - 1$ trasposizioni semplici si può portare a_1 al primo posto. Si ottiene così una permutazione π_1 in cui a_1 è al primo posto, mentre gli altri elementi si susseguono nello stesso ordine che avevano in π. Due elementi diversi da a_1 fanno quindi inversione in π_1 se e solo se la fanno in π. L'elemento a_2 occuperà in π_1 il k_2-esimo posto. Gli elementi diversi da a_1 che in π_1, e quindi in π, fanno inversione con a_2 sono esattamente $k_2 - 2$ (≥ 0), ossia quelli che ora occupano i posti dal secondo al $(k_2 - 1)$-esimo (se è $k_2 - 2 = 0$, l'elemento a_2 è già al suo posto). Con $k_2 - 2$ trasposizioni semplici è possibile portare a_2 al secondo posto. Si ottiene così una permutazione π_2 in cui ai primi due posti ci sono gli elementi a_1 e a_2, mentre gli altri elementi si susseguono nello stesso ordine che avevano nelle permutazioni π e π_1. In modo analogo si può portare l'elemento a_3 al terzo posto con un numero di trasposizioni uguale a quello degli elementi diversi da a_1 e a_2 che con a_3 fanno inversione in π (e quindi in π_1 e π_2). E così, di seguito, si sistemano tutti gli altri elementi. Si ottiene, alla fine, la permutazione π_0 con un numero di trasposizioni (semplici) pari a quello delle coppie che in π fanno inversione.[5] □

Vogliamo provare che, se in luogo di π_0, si assume come fondamentale un'altra permutazione π^*, due qualsiasi permutazioni π_1 e π_2 hanno la stessa parità rispetto a π^* se e solo se l'avevano rispetto a π_0. Può però ben accadere che π_1 e π_2 siano di classe pari rispetto a π_0, ma di classe dispari rispetto a π^*, o viceversa. Ciò è espresso dal seguente risultato:

Corollario 2.16. *La partizione delle permutazioni di un insieme finito E in due classi è indipendente dalla permutazione che si assume come fondamentale.*

Dimostrazione. Assumiamo dunque come nuova permutazione fondamentale un'arbitraria π^*. Sia k il numero delle coppie che in π_0 fanno inversione rispetto a π^*. Consideriamo ora un'arbitraria permutazione π e diciamo h il numero delle coppie che in essa fanno inversione rispetto a π_0. Per il Teorema 2.15, si può ottenere π da π_0 e π_0 da π^* rispettivamente con h e k trasposizioni semplici. Si può dunque ottenere π da π^* con $h + k$ trasposizioni. I numeri h e $h + k$ hanno la stessa parità se e solo se k è pari. Si conclude pertanto che π ha la stessa parità rispetto a π^* e a π_0 se k è pari, mentre ha parità diverse (sempre rispetto a π^* e a π_0) se k è dispari. In conclusione, passando da una permutazione fondamentale ad un'altra, o tutte le permutazioni cambiano la loro parità, o non la cambia nessuna. □

Osservazione 2.17. Date due permutazioni π_1 e π_2, sappiamo che è possibile passare dall'una all'altra mediante un certo numero k di trasposizioni. Questo numero k non è però univocamente determinato, come si può agevolmente constatare, ma risulta perfettamente determinata la sua parità. Ciò significa che, se passiamo da π_1 a π_2 mediante h trasposizioni, allora h e k hanno la stessa parità. La cosa è

[5] Anche questo teorema può essere dimostrato per induzione, ne lasciamo la cura a chi studia.

ovvia: basta pensare che ogni trasposizione dà luogo ad una permutazione dell'altra classe. ◁

Dato che la partizione delle permutazioni di un insieme non dipende dalla permutazione π_0 che viene assunta come fondamentale, deve essere possibile definirla senza fare esplicito riferimento ad una particolare π_0. Sussiste infatti il seguente teorema che è un'immediata conseguenza di quanto precede.

Teorema 2.18. *Due permutazioni π_1 e π_2 di un insieme finito E appartengono alla stessa classe se e solo se è possibile passare dall'una all'altra con un numero pari di trasposizioni.* □

Esempio 2.6. Si consideri una matrice quadrata di ordine 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il suo determinante d risolvendo, per esempio, rispetto alla prima riga. Si ottiene l'espressione:

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

In essa, ogni addendo è un prodotto del tipo $a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}a_{3\varphi(3)}$, dove φ è un'applicazione biiettiva di $E := E(3)$ in sé. Si constata facilmente, e lo lasciamo per esercizio al lettore, che ogni addendo è preceduto dal segno "+" o dal segno "-" a seconda che φ dia luogo ad una permutazione di classe pari o di classe dispari di E rispetto alla permutazione fondamentale $\pi_0 = (1,\ 2,\ 3)$. (Si veda anche l'Esercizio 2.10.)

Esercizi

Esercizio 2.6. Sia E l'insieme dei primi 10 numeri naturali positivi e indichiamo con π_0 la permutazione di E che si ottiene considerando i suoi elementi in ordine crescente. Posto $\pi = (2,\ 1,\ 5,\ 4,\ 3,\ 10,\ 9,\ 8,\ 6,\ 7)$, si dica quante sono le coppie che in essa fanno inversione. Stessa domanda per la permutazione π^* opposta di π. Quante sono le permutazioni di classe pari rispetto a π_0 in cui il numero 1 è al terzo posto?

Esercizio 2.7. Si passi dalla π alla π_0 di cui all'esercizio precedente effettuando il minor numero possibile di trasposizioni. Qual è questo numero?

Esercizio 2.8. Si dimostri che, per ogni numero naturale k compreso fra 0 e 45, esiste una permutazione dell'insieme $E(10)$ che ha esattamente k coppie che fanno inversione rispetto a π_0.

Esercizio 2.9. Siano E un n-insieme e π_0 una sua permutazione. Diciamo che si attua una *rotazione* di π_0 se si effettua una o più volte l'operazione di portare all'ultimo posto l'elemento di tesa, senza toccare gli altri.
Sia $E = \{i,\ j,\ k\}$. Si constati che due permutazioni di E appartengono alla medesima classe se e solo se ciascuna di esse si ottiene dall'altra mediante una rotazione. Come stanno le cose per un insieme di n elementi anziché di 3?
È noto il significato che, di solito, hanno in Geometria Analitica i simboli i, j, k. Con questa interpretazione, le classi della partizione sono formate, rispettivamente, dalle terne *destrorse* e da quelle *sinistrorse* (cfr. Figura 2.3).

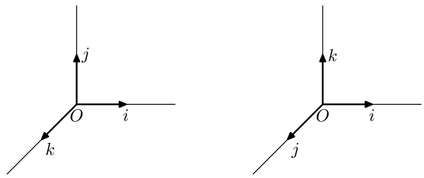

Figura 2.3

Esercizio 2.10.* Si generalizzi quanto visto nell'Esempio 2.6 al caso di una matrice quadrata di ordine n, provando che per il suo determinante d si ha

$$d = \sum i(\varphi) \cdot a_{1\varphi(1)} a_{2\varphi(2)} a_{3\varphi(3)} \cdots a_{n\varphi(n)},$$

dove la somma è estesa a tutte le applicazioni biiettive φ di $E(n)$ in sé e $i(\varphi)$ vale 1 o -1 a seconda che φ dia luogo a una permutazione di classe pari o di classe dispari rispetto alla permutazione fondamentale $\pi_0 = (1,\ 2,\ \ldots, n)$.

2.3 Disposizioni semplici

Riprendiamo ora il filo del discorso, affrontando il problema dell'Esempio 1.4. Si tratta di vedere in quanti modi si possono scegliere 7 dei 14 studenti e ordinarli totalmente. più in generale, si può porre il seguente:

Problema 2.19. *Dato un insieme E di n elementi, quanti sono i suoi sottoinsiemi ordinati di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?*

Definizione 2.20. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme ordinato di k elementi, con $0 \leq k \leq n$, prende il nome di *disposizione (semplice) di classe k* degli elementi di E; al plurale, si parla di *disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k*. In altre parole, le disposizioni di n oggetti a k a k sono le applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n-insieme E.

Il nostro quesito può dunque essere così riformulato:

Problema 2.21. *Quante sono le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k, con $0 \leq k \leq n$?*

Il numero cercato non dipende dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k; indichiamolo con $D_{n,k}$. Sia, intanto, $k > 0$. Si ha immediatamente:

$$D_{n,1} = n; \quad D_{n,n} = n!.$$

Infatti, nel primo caso c'è solo da scegliere un elemento di E, mentre, nel secondo, abbiamo tutte le sue permutazioni.
Supponiamo di avere una delle disposizioni cercate; facendo seguire agli elementi di questa gli $n-k$ che restano, arbitrariamente ordinati, si ottiene una permutazione di tutti gli elementi di E. Anzi, partendo da una disposizione di classe k, si possono ottenere, nel modo sopra detto, esattamente $(n-k)!$ permutazioni diverse di E. D'altra parte, ogni permutazione di E si può pensare ottenuta con tale legge da un'opportuna (e unica) disposizione di classe k. Si conclude così con l'uguaglianza

$$P_n = P_{n-k} \times D_{n,k},$$

ossia:

$$D_{n,k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Si pone poi, per convenzione, $D_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$ (e quindi, in particolare, $D_{0,0} = \frac{0!}{0!} = 1$), in accordo col significato del simbolo, dato che c'è un unico modo di scegliere l'insieme vuoto (anche se ordinato).

Definizione 2.22. Per ogni numero reale x e per ogni numero naturale k, si definisce

$$(x)_k := \begin{cases} 1, & \text{se è } k = 0, \\ x, & \text{se è } k = 1, \\ x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1), & \text{se è } k > 1. \end{cases}$$

Il numero $(x)_k$ prende il nome di *fattoriale discendente di x di ordine k.*

Si ha $(x)_k = 0$, se e solo se x è un numero naturale minore di k. Inoltre, per ogni $n,\ k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(n)_n = n!; \quad (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ se è } k < n.$$

Si ottiene così il

Teorema 2.23. *Le disposizioni (semplici) di n oggetti a k a k sono in numero di* $D_{n,k} = (n)_k$. □

Come si è già detto, il numero $D_{n,k}$ delle disposizioni di n oggetti a k a k, ossia delle applicazioni iniettive di $E(k)$ in un n-insieme E, non dipende dalla natura degli oggetti che compongono gli insiemi E ed $E(k)$, ma solo da n e da k; tenendo anche conto della Definizione 1.6 sull'applicazione vuota, si conclude che il Teorema 2.23 è equivalente al seguente

Teorema 2.24. *Le applicazioni iniettive di un k-insieme A in un n-insieme B (con $0 \leq k \leq n$) sono in numero di* $(n)_k$. □

Nel caso particolare dell'esempio da cui siamo partiti, si ottiene che le possibili liste sono

$$D_{14,7} = (14)_7 = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 17\,297\,280.$$

Facciamo ancora un esempio.

Esempio 2.7. Quante sono le parole di 4 lettere distinte che si possono formare utilizzando le lettere del vocabolo *albergo*?

Anche in questo caso, come in altri analoghi, prescindiamo dal fatto che le parole di cui si parla abbiano un qualche significato. Ammesso ciò, il problema proposto è quello di sapere in quanti modi si possono disporre 7 oggetti a 4 a 4. La risposta è dunque $D_{7,4} = (7)_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Esercizi

Esercizio 2.11. In una gara di corsa vengono assegnate tre medaglie (una d'oro, una d'argento e una di bronzo) ai primi 3 classificati di ciascuna delle 3 categorie in cui i concorrenti sono stati divisi. Quante sono le possibili assegnazioni delle medaglie se il numero dei partecipanti è il seguente: 18 seniores, 14 iuniores, 12 esordienti?

Esercizio 2.12. Il direttore della produzione di una distilleria ha deciso che, su ogni 200 bottiglie di grappa prodotte, se ne debba scegliere una per esami di laboratorio e un'altra per fini pubblicitari. In quanti modi si possono scegliere, da uno stock di 200, due bottiglie, una per ciascuno di questi scopi?

Esercizio 2.13. In una gara ci sono 20 concorrenti. Vengono assegnati 5 premi (diversi) ai primi 5 classificati. Quante sono le possibili assegnazioni dei premi nelle quali Giorgio è fra i vincitori? E quelle in cui Giorgio figura al terzo posto?

Esercizio 2.14. Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte, da 000 000 a 999 999 (cioè se si conviene di scrivere, per esempio, 012 345 in luogo di 12 345)? Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte effettive (cioè numeri di 6 cifre che non cominciano con 0)?

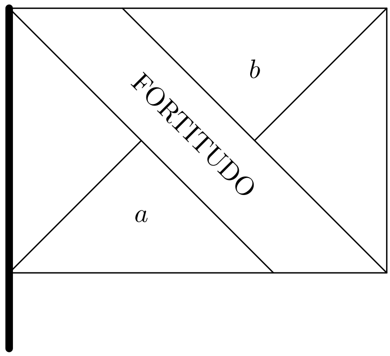

Figura 2.4

Esercizio 2.15. Un'associazione sportiva vuole adottare una bandiera come quella mostrata in Figura 2.4, utilizzando alcuni fra i colori seguenti: bianco, nero, rosso, giallo, verde, ocra, azzurro, violetto, arancione. Quante sono le possibili bandiere se si richiede che: la scritta centrale sia o rossa o nera e abbia comunque un colore diverso da quello della fascia che la contiene; che tutte le 5 regioni abbiano colori diversi? E se si chiede che le regioni a e b abbiano lo stesso colore?

2.4 Combinazioni semplici

Passiamo all'Esempio 1.5. Si tratta di vedere in quanti modi si possono scegliere 5 elementi da un insieme che ne contiene 90. Si badi che, in questo caso, non conta l'ordine con cui si considerano tali elementi. più in generale, si può affrontare il

Problema 2.25. *Dato un n-insieme E, quanti sono i suoi sottoinsiemi di k elementi, essendo k un numero naturale, con $0 \leq k \leq n$?*

Definizione 2.26. Dato un insieme E di n elementi, ogni suo sottoinsieme di k elementi, con $0 \leq k \leq n$, prende il nome di *combinazione (semplice) di classe k* degli elementi di E. Al plurale, si parla di *combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k*.

Possiamo perciò riformulare il nostro quesito così:

Problema 2.27. *Quante sono le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k (con $0 \leq k \leq n$)?*

Il numero che stiamo cercando non dipende, ovviamente, dalla natura degli oggetti, ma solo da n e da k; indichiamolo con $C_{n,k}$. Come appare dalla definizione, la differenza tra combinazioni e disposizioni consiste nel fatto che gruppi di k oggetti di un insieme E, che differiscano solo per l'ordine con cui essi vengono considerati, danno luogo a diverse disposizioni, ma sono la medesima combinazione. Anzi, si vede subito che da ogni combinazione di classe k si ottengono esattamente $k!$ disposizioni diverse, cioè tante quanti sono i modi di ordinare totalmente i k oggetti in questione. Si ottiene così l'uguaglianza

$$D_{n,k} = C_{n,k} \times P_k,$$

dalla quale si ricava

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_{n-k}} \cdot \frac{1}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Si conclude così col

Teorema 2.28. *Le combinazioni (semplici) di n oggetti a k a k sono in numero di*

$$C_{n,k} = \frac{(n)_k}{k!},$$

quali che siano i naturali n e k, con $0 \leq k \leq n$. □

In luogo del simbolo $C_{n,k}$, si usa più volentieri l'espressione $\binom{n}{k}$ che si legge n *su* k.
Si ammette infatti la seguente

Definizione 2.29. Quali che siano i numeri naturali n e k si definisce:

$$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}.$$

Dunque, se n e k sono positivi, si ha:

$$\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

e, in particolare,

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ se e solo se è } n < k.$$

Essendo $0! = 1$, si ottiene $\binom{n}{0} = 1$ e, in particolare, $\binom{0}{0} = 1$, in accordo con l'uguaglianza $\binom{n}{0} = C_{n,0}$ e col fatto che c'è un unico modo di scegliere un sottoinsieme vuoto (anche partendo da un insieme privo di elementi).

Definizione 2.30. I numeri rappresentati dai simboli $\binom{n}{k}$ prendono il nome di *coefficienti binomiali* (il perché verrà spiegato nel prossimo capitolo).

Quanto al problema del lotto, si ha che le possibili cinquine, su una ruota, sono

$$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 43\,949\,268.$$

Siano A e B due insiemi totalmente ordinati, rispettivamente di k e di n elementi, con $0 < k \leq n$. Ogni applicazione strettamente crescente (e quindi iniettiva) di A in B individua un k-sottoinsieme di B. Viceversa, dato un k-sottoinsieme C di B, esiste una e una sola applicazione strettamente crescente di A in C. Dunque:

C'è corrispondenza biunivoca fra i k-sottoinsiemi di un n-insieme B totalmente ordinato e le applicazioni crescenti di un k-insieme totalmente ordinato A in B.

Se ammettiamo (Definizione 1.6) che esiste un'applicazione dell'insieme vuoto in B e accettiamo di chiamarla strettamente crescente, l'enunciato sopra scritto conserva validità anche per $k = 0$. Si ottiene così che il Teorema 2.28 è equivalente al seguente

Teorema 2.31. *Dati un k-insieme totalmente ordinato A e un n-insieme totalmente ordinato B, con $0 \leq k \leq n$, le applicazioni strettamente crescenti di A in B sono in numero di $\binom{n}{k}$.* □

Esaminiamo ancora il seguente

Esempio 2.8. Quanti sono i rettangoli che compaiono nella Figura 2.5?

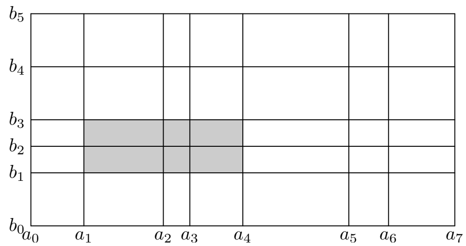

Figura 2.5

Ogni rettangolo è individuato dai suoi 4 lati, ossia da due rette orizzontali e da due rette verticali. Le prime sono in tutto 6, le altre 8. Per esempio, il rettangolo evidenziato in figura è individuato dalle rette orizzontali per b_1 e b_3 e da quelle verticali per a_1 e a_4. Ci sono $\binom{6}{2} = 15$ modi per scegliere le 2 rette orizzontali e $\binom{8}{2} = 28$ modi di scegliere quelle verticali. In tutto, i rettangoli sono perciò $15 \times 28 = 420$.