1.9 Quadrilateri ciclici e teorema di Tolomeo

Un quadrilatero si dice *ciclico* se può essere inscritto in una circonferenza.
Dal teorema 1.3.7 discende il seguente:

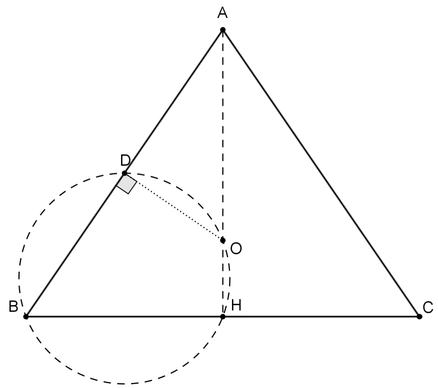
Teorema 1.9.1. *Un quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari.*

Si ricordi che per dimostrare l'inscrivibilità di un quadrilatero in una circonferenza è possibile anche utilizzare il lemma 1.3.8. Altri criteri saranno presentati in seguito.

Lemma 1.9.2. Un rettangolo o un trapezio isoscele sono sempre inscrivibili in una circonferenza. Un rombo (a meno che non sia un quadrato), un parallelogramma (a meno che non sia un rettangolo), un trapezio scaleno, non sono mai inscrivibili in una circonferenza.

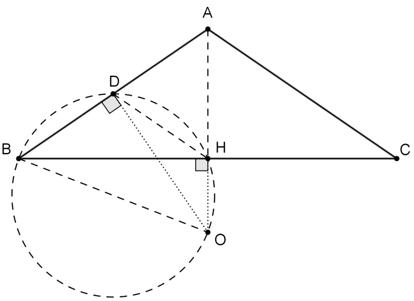
Esempio 1.9.1. Sia O il circocentro di un triangolo isoscele ABC di base BC. Indicato con H il piede dell'altezza relativa a BC e con D il punto medio di AB, dimostrare che il quadrilatero $BDOH$ è ciclico.

Soluzione. Ci sono due casi distinti da esaminare (più il caso limite): triangolo ABC acutangolo, e triangolo ABC ottusangolo. Iniziamo dal primo caso, nel quale il circocentro O è interno al triangolo (lemma 1.5.8).



L'angolo $\widehat{OHB}$ è retto per costruzione: H infatti è piede dell'altezza. Dunque il quadrilatero sarà ciclico se l'angolo opposto a $\widehat{OHB}$ è suo supplementare, cioè anch'esso retto. O è il circocentro, e D è il punto medio di AB; quindi DO è necessariamente una mediana, ed è perpendicolare al lato AB. Perciò anche l'angolo

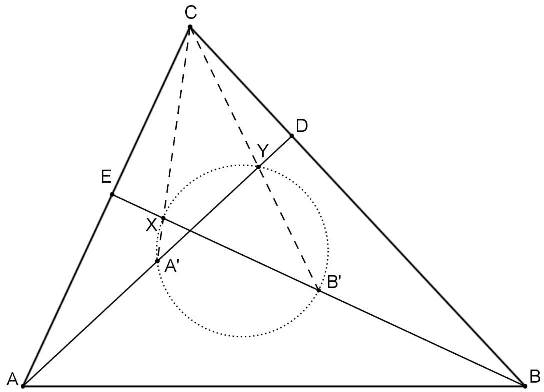
$\widehat{BDO}$ è retto, e il quadrilatero $BDOH$ è ciclico per il lemma 1.8.2.
Nel secondo caso il circocentro O cade esternamente al triangolo, sul prolungamento dell'altezza AH.



Per quanto dimostrato in precedenza, sia l'angolo $\widehat{OHB}$ sia l'angolo $\widehat{ODB}$ sono retti: quindi essi vedono il segmento BO sotto lo stesso angolo, il che è sufficiente per concludere che B, O, H e D sono conciclici (lemma 1.3.8). Il segmento BO, essendo sotteso da angoli retti, è il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero (lemma 1.3.9).
Resta a questo punto da esaminare il caso in cui ABC sia rettangolo in A, quando cioè il punto H coincide con O. Ma il caso è banale perché i punti da considerare sono solo tre: D, B e $H = O$; e tre punti non allineati individuano sempre una e una sola circonferenza. □

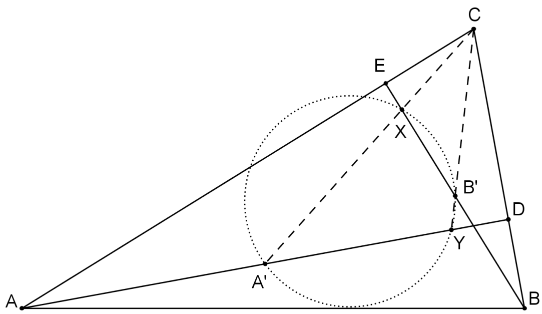
Esempio 1.9.2. * (*Olimpiadi della Matematica, Gara Provinciale 2011*)
Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A' il punto medio di AD, B' il punto medio di BE. CA' interseca BE in X, CB' interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per A', B', X e Y.

Soluzione. Il testo, volutamente, non parla di quadrilatero ciclico, perché i quattro punti, a seconda dei casi, possono presentarsi in ordine diverso, come indicato nelle figure. Ai due casi corrispondono dimostrazioni differenti.
Nel primo caso, i punti X e Y si trovano dalla stessa parte rispetto ad A' e B'.



I triangoli ADC e BCE sono simili per il primo criterio di similitudine (teorema 1.4.3): hanno infatti ambedue un angolo retto (si ricordi che AD e BE sono altezze), e l'angolo $\widehat{ACB}$ in comune. Ne segue, in particolare, che $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ e che $AC : BC = AD : BE$; ma, ricordando che $AD = 2AA'$ e $BE = 2BB'$, vale anche la proporzione $AC : BC = AA' : BB'$. Pertanto i triangoli CAA' e $B'BC$ sono anch'essi simili, per il secondo criterio (teorema 1.4.4). In particolare risultano congruenti gli angoli $\widehat{AA'C}$ e $\widehat{BB'C}$. L'angolo $\widehat{CA'Y}$ è supplementare di $\widehat{AA'C}$; l'angolo $\widehat{CB'X}$ è supplementare di $\widehat{BB'C}$; essi sono dunque congruenti in quanto supplementari di angoli congruenti: $\widehat{CA'Y} = \widehat{CB'X}$. I punti A' e B', infine, vedono il segmento XY sotto il medesimo angolo, quindi i punti A', B', X e Y risultano conciclici (lemma 1.3.8).

Nel secondo caso si proceda allo stesso modo: 1) i triangoli ADC e BCE sono simili; 2) i triangoli CAA' e $B'BC$ sono anch'essi simili; 3) $\widehat{CA'Y} = \widehat{CB'X}$.

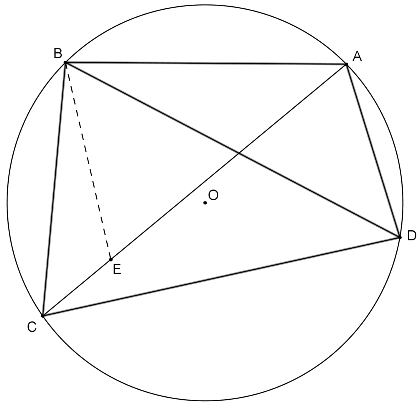


Ma $\widehat{XB'Y}$ è supplementare di $\widehat{CB'X}$ per costruzione, perciò è a sua volta supplementare di $\widehat{CA'Y}$. Il quadrilatero $A'YB'X$ ha due angoli opposti supplementari, e quindi, per il teorema 1.9.1, è inscrivibile in una circonferenza. □

Fra i teoremi di geometria euclidea non scolastica il più utile e frequente per le gare di livello base e intermedio (individuali o a squadre) è il teorema di Tolomeo[29].

Teorema 1.9.3. *(Teorema di Tolomeo): in un quadrilatero ciclico*[30] $ABCD$ *la somma dei prodotti delle due coppie di lati opposti è congruente al prodotto delle diagonali. In simboli:* $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$[31].

Esempio 1.9.3. * Dimostrare il teorema di Tolomeo.



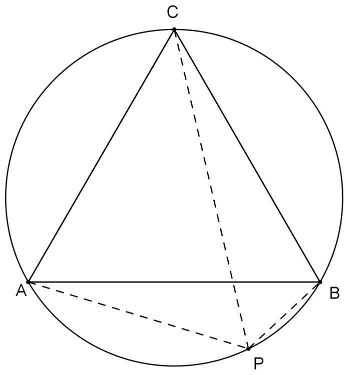
Soluzione. In un quadrilatero ciclico $ABCD$, si costruisca sulla diagonale AC il punto E in modo che sia $\widehat{AEB} = \widehat{BCD}$. Ne consegue che i triangoli AEB e BDC sono simili, e dunque $AE : CD = AB : BD$. Ma anche i triangoli BEC e ADB sono simili, da cui $EC : AD = BC : BD$. Dalle due proporzioni appena ricavate si ottiene: $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ e $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Sommando termine a termine le ultime due uguaglianze si ha: $AE \cdot BD + EC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$; raccogliendo BD: $BD \cdot (AE + EC) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, e quindi essendo $AE + EC = AC$, risulta $BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, che è quanto si doveva dimostrare. □

[29] Claudio Tolomeo di Alessandria, astronomo, geografo e matematico greco (ca. 100-175 d. C.); il teorema compare nel primo libro della sua opera più famosa, l'*Almagesto*.

[30] Si veda oltre, teorema 1.13.3, per il caso generale riguardante un quadrilatero qualunque.

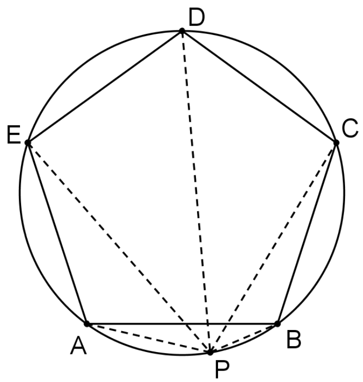
[31] Il teorema può essere utilizzato anche come criterio per dimostrare la ciclicità di un quadrilatero.

Esempio 1.9.4. Dato un triangolo equilatero ABC, sia P un punto della circonferenza a esso circoscritta appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP = CP$.



Soluzione. Si applichi il teorema di Tolomeo (teorema 1.9.3): $AB \cdot CP = AP \cdot BC + BP \cdot AC$. Detto l il lato del triangolo equilatero ABC, la relazione si può riscrivere: $l \cdot CP = AP \cdot l + BP \cdot l$. Semplificando per l si ottiene la tesi. □

Esempio 1.9.5. * (*Stage di Cortona, 1994*)
Sia $ABCDE$ un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che $AP + BP + DP = CP + EP$.



Soluzione. Il problema si risolve tramite un'applicazione ripetuta del teorema di Tolomeo (teorema 1.9.3). I quadrilateri $APBE$, $APBC$ e $APBD$, infatti, sono tutti ciclici, quindi a ciascuno di essi possiamo applicare il teorema. Sia d la lunghezza delle diagonali del pentagono e l quella dei lati. In $APBE$: $AP \cdot d + PB \cdot l = PE \cdot l$; in $APBC$: $AP \cdot l + PB \cdot d = PC \cdot l$. Sommando termine a termine: $AP \cdot d + PB \cdot l + AP \cdot l + PB \cdot d = PE \cdot l + PC \cdot l$ (1). Ancora applicando Tolomeo, questa volta in $APBD$: $AP \cdot d + PB \cdot d = PD \cdot l$; si inserisca quest'ultima relazione nella (1): $PD \cdot l + PB \cdot l + AP \cdot l = PE \cdot l + PC \cdot l$. A questo punto, semplificando per l, si ottiene la tesi. □

Lemma 1.9.4. L'area di un quadrilatero ciclico può essere calcolata con la *formula di Brahmagupta*[32]:

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\,,$$

dove p è il semiperimetro del quadrilatero.

Lemma 1.9.5. Un quadrilatero avente le diagonali perpendicolari può essere inscritto in un rettangolo, avente lati paralleli e congruenti alle diagonali del quadrilatero. L'area del quadrilatero è pari alla metà dell'area del rettangolo a esso circoscritto. Pertanto, dette d_1 e d_2 le diagonali, l'area si calcola: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. La formula è un caso particolare di una proprietà più generale, che sarà trattata più avanti, nel paragrafo dedicato alla trigonometria (teorema 1.12.2).

Il rombo è un quadrilatero con diagonali perpendicolari e contemporaneamente un parallelogramma. L'area del rombo si può quindi trovare con la formula appena indicata.

Esempio 1.9.6. Un quadrilatero ciclico ha tre lati consecutivi di misura 7, 15 e 24 e ha le diagonali tra loro perpendicolari. Quanto misura il quarto lato?[33]

Soluzione. Sia x il lato cercato. Per usare la formula di Brahmagupta (lemma 1.9.4) si inizi a calcolare il semiperimetro:

$$p = \frac{7+15+24+x}{2} = \frac{46+x}{2} = 23 + \frac{x}{2}\,;$$

[32] Brahmagupta (598-668), matematico indiano.

[33] Per questo problema (come d'altra parte per molte altre cose) sono in debito con Sandro Campigotto.

si avrà quindi che

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left(16+\frac{x}{2}\right)\left(8+\frac{x}{2}\right)\left(-1+\frac{x}{2}\right)\left(23-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(32+x)(16+x)(x-2)(46-x)}\,.$$

Si proceda ora a calcolare l'area tramite le diagonali: essendo le diagonali d_1 e d_2 perpendicolari, l'area è pari a $\mathcal{A} = (d_1 \cdot d_2)/2$ (lemma 1.9.5). Ma, utilizzando il teorema di Tolomeo (teorema 1.9.3), l'area può essere espressa come

$$\frac{1}{2}(7\cdot 24 + 15\cdot x) = 84 + \frac{15x}{2}\,.$$

Si eguaglino a questo punto le due espressioni trovate per calcolare l'area del quadrilatero:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(32+x)(16+x)(x-2)(46-x)} = 84 + \frac{15x}{2}\,,$$

$$(32+x)(16+x)(x-2)(46-x) = (4\cdot 84 + 2\cdot 15x)^2\,.$$

Tramite conti noiosi ma elementari si ricava l'equazione biquadratica

$$x^4 - 800x^2 + 160000 = 0\,,$$

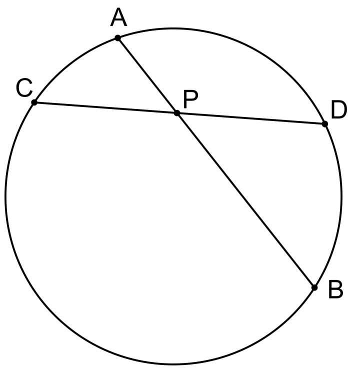
da cui $x^2 = 400$, e infine $x = 20$. □

1.10 Teoremi sulle corde, le tangenti e le secanti

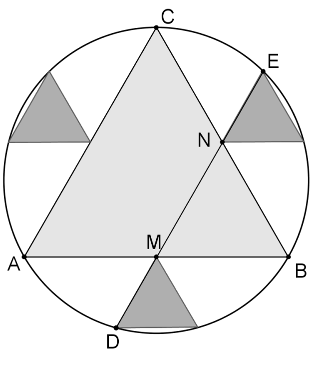
In questo paragrafo saranno esaminati tre noti teoremi, strettamente connessi fra loro. Tali teoremi, in effetti, non sono che casi particolari di una teoria più generale, che non sarà illustrata in questo testo in quanto argomento non elementare[34].

Teorema 1.10.1. *(Teorema delle corde): in una circonferenza si traccino due corde AB e CD secanti nel punto P. Vale allora la proporzione: $PA : PC = PD : PB$. Sussiste anche il teorema inverso: Se vale la proporzione data, allora i punti A, C, B e D sono conciclici.*

[34] La dimostrazione di ciascuno dei tre teoremi, che segue da semplici considerazioni sulla similitudine di triangoli, può essere trovata in un qualsiasi testo di geometria per la scuola superiore. L'argomento più generale cui si fa cenno nel testo è la *Potenza di un punto rispetto a una circonferenza*.

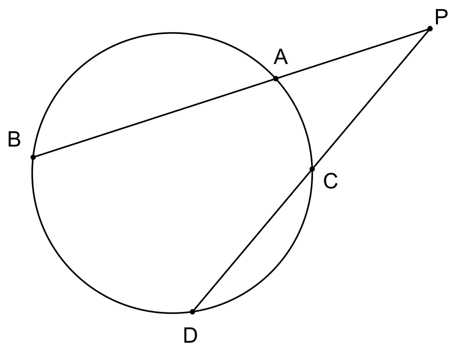


Esempio 1.10.1. (*Gara a squadre on line, febbraio 2012*)
La pista di atterraggio è di forma circolare con raggio $R = 1000\sqrt{3}$. All'interno è evidenziata in grigio chiaro la zona racchiusa da un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza. Le zone libere per l'atterraggio sono indicate in grigio scuro e sono racchiuse da triangoli equilateri con un vertice nel punto medio di un lato del triangolo chiaro e gli altri due sull'arco di circonferenza più piccolo individuato da tale lato. Dopo avere scritto il lato di uno dei triangoli scuri nella forma $m + n\sqrt{5}$ calcolare $n - m$.



Soluzione. Si richiede di trovare il lati di uno dei triangoli più scuri. Sia dunque x il lato incognito. Il segmento AB, lato del triangolo ABC, vale 3000 (lemma 1.8.4); ma M è punto medio di AB, quindi $AM = MB = 1500$. Sia ora, per comodità di notazione, $AM = MB = 1500 = a$. Per il teorema delle corde (teorema 1.10.1) vale che $DM : AM = MB : ME$; ora, $ME = MN + NE$, dove $MN = a$ (teorema 1.4.6) e $NE = x$. Perciò $x : a = a : (x + a)$, da cui si deduce $x^2 + ax - a^2 = 0$. L'unica soluzione positiva è $x = -(a/2) + (a\sqrt{5})/2$, corrispondente a $-750 + 750\sqrt{5}$. Pertanto $m = -750$ e $n = 750$, e la soluzione richiesta è $n-m = 750-(-750) = 1500$. □

Teorema 1.10.2. *(Teorema delle secanti): si considerino due secanti a una circonferenza uscenti entrambe da un punto P esterno alla circonferenza. La prima secante incontra la circonferenza in A e in B (A più vicino a P), la seconda in C e in D (C più vicino a P). Vale allora la proporzione $PA : PC = PD : PB$. Vale anche il teorema inverso: se 4 punti A, B, C e D rispettano la proporzione $PA : PC = PD : PB$ rispetto a un certo punto P, allora A, B, C e D sono conciclici.*



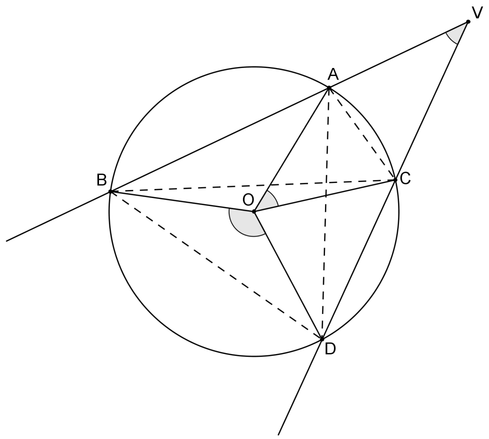
Quindi, riepilogando, i criteri per stabilire la ciclicità di un quadrilatero sono: lemma 1.3.8, teorema 1.19.1, teorema 1.19.3, teoremi 1.10.1 e 1.10.2.

Esempio 1.10.2. * (*Quaestio Copernicana, marzo 2009*)[35]
Da un punto esterno a una circonferenza si conducano due secanti; esse formano con la circonferenza due corde qualsiasi. Dimostrare che l'angolo fra le due secanti è congruente alla semidifferenza fra i due angoli al centro che sottendono i due archi interni alle secanti.

Soluzione. Si applichi il teorema delle secanti (teorema 1.10.2): ne risulta che

$$VB : VD = VC : VA\,.$$

[35]Viene qui riproposto l'esempio 1.3.5, con una soluzione alternativa.



Pertanto i triangoli VAC e VBD sono simili, avendo l'angolo $\widehat{V}$ in comune e due lati in proporzione (II criterio, teorema 1.4.4); in particolare $\widehat{ABD} = \widehat{VCA}$. Ma per la proprietà dell'angolo al centro (teorema 1.3.7) $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD}$; quindi, in base alla similitudine appena dimostrata $\widehat{AOD} = 2\widehat{VCA}$. Per lo stesso ragionamento $\widehat{AOC} = 2\widehat{VAC}$. Si proceda ora sottraendo $\widehat{COB}$ da $\widehat{AOD}_2$ (con $\widehat{AOD}_2$ s'intende l'angolo maggiore di 180°, cioè quello che insiste sull'arco ABD):

$$\widehat{AOD}_2 - \widehat{COB} = (\widehat{AOB} + \widehat{BOD}) - (\widehat{AOC} + \widehat{AOB}) = \widehat{BOD} - \widehat{AOC}\,.$$

Quest'ultima è proprio la differenza cercata, che si vuole dimostrare essere doppia di $\widehat{AVC}$. Dunque:

$$\widehat{BOD} - \widehat{AOC} = \widehat{AOD}_2 - \widehat{COB} =$$

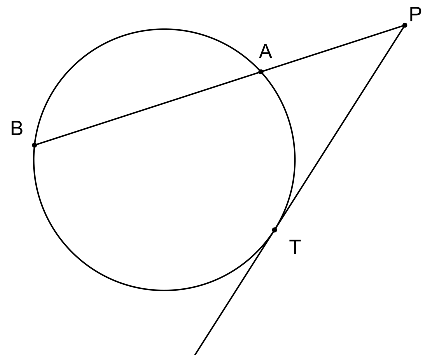
$$= 360° - \widehat{AOD} - 2\widehat{VAC} = 360° - 2\widehat{VCA} - 2\widehat{VAC} =$$

$$= 360° - 2(\widehat{VCA} + \widehat{VAC}) = 360° - 2(180° - \widehat{AVC}) =$$

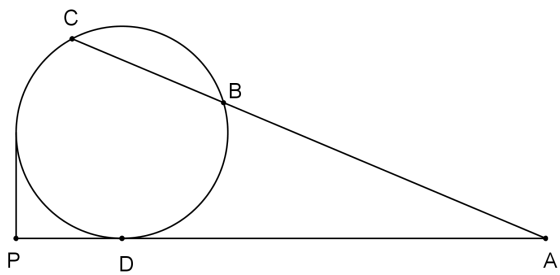
$$= 360° - 360° + 2\widehat{AVC} = 2\widehat{AVC}\,;$$

e con ciò la dimostrazione è terminata. □

Teorema 1.10.3. *(Teorema della tangente e della secante): si considerino una secante e una tangente a una circonferenza uscenti entrambe da un punto P esterno alla circonferenza. La secante incontra la circonferenza in A e in B (A più vicino a P); la tangente incontra la circonferenza nel punto di tangenza T. Vale allora la proporzione $PA : PT = PT : PB$, cioè PT è medio proporzionale fra PA e PB.*



Esempio 1.10.3. *[36] (*Gara a squadre stage di Campobasso, febbraio 2012*)
Il tiro triangolare dei gemelli Derrick consiste in questo: uno dei due gemelli salta sul palo della porta avversaria, l'altro tira il pallone in linea retta sopra la porta e il primo spicca un balzo dal palo intercettando il tiro e passandolo di testa all'altro, che tira in porta. Affinché questa tecnica riesca, vi sono delle precise condizioni: presa la circonferenza tangente al palo, alto 2 metri, nel suo punto più alto e al suolo, il tiro rettilineo del secondo gemello la incontra in due punti, che vanno entrambi bene per il tiro triangolare solo se formano un lato del triangolo equilatero inscritto in quella circonferenza. Sapendo che il secondo gemello calcia da 10 metri di distanza dalla porta, si trovi la parte intera del quadrato della somma delle distanze dei due punti favorevoli dal punto in cui parte il tiro.

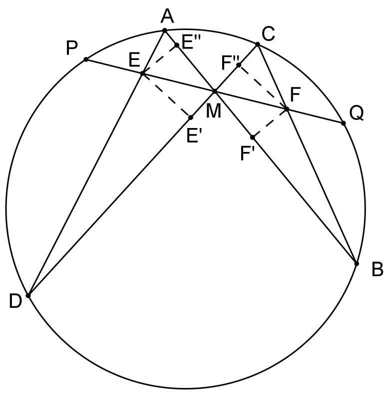


Soluzione. Si osservi, per iniziare, che il raggio della circonferenza vale 2; che $PA = 10$ e quindi $DA = 8$. Il testo chiede di calcolare la parte intera di

[36] A questo problema viene assegnato un asterisco non perché presenti particolari difficoltà, ma perché il testo è lungo e intricato, e pertanto difficile da interpretare, specialmente durante una gara.

$(AB + AC)^2$. Il teorema della tangente e della secante (teorema 1.10.3) fornisce $AB \cdot AC = AD^2 = 64$. Ma il testo dice che BC è il lato del triangolo equilatero inscritto: dal momento che il raggio è 2, $BC = AC - AB = 2\sqrt{3}$ (lemma 1.8.4). Pertanto si risolve un sistema fra le equazioni $AB \cdot AC = 64$ e $AC - AB = 2\sqrt{3}$. Le soluzioni sono: $AB = \sqrt{67} - \sqrt{3}$ e $AC = \sqrt{67} + \sqrt{3}$. La somma delle due distanze è $2\sqrt{67}$, e il suo quadrato vale $4 \cdot 67 = 268$. □

Esempio 1.10.4. ** (*Teorema della farfalla*[37])
Data una corda PQ in una circonferenza, sia M il suo punto medio. Si prendano altre due corde AB e CD passanti per M. Siano E ed F, rispettivamente, i punti in cui AD e BC intersecano PQ. Dimostrare che M è il punto medio del segmento EF.



Soluzione.[38] Si inizi col disegnare le proiezioni E' ed E" di E su CD e AB, rispettivamente; e le proiezioni F' ed F" di F su AB e CD. I triangoli MEE" e MFF' sono simili (I criterio, teorema 1.4.3) perché hanno ambedue un angolo retto ($\widehat{EE"M} = \widehat{MF'F} = 90°$) e i due angoli in M sono opposti al vertice; ne consegue che $EM : MF = EE" : FF'$. I triangoli MEE' e MFF" sono simili, secondo un analogo ragionamento; pertanto $EM : MF = EE' : FF"$. I triangoli AEE" e CFF" sono simili per il medesimo criterio, in quanto ambedue sono rettangoli e hanno angoli $\widehat{DCB}$ e $\widehat{DAB}$ congruenti perché angoli alla circonferenza che insistono

[37] Si ritiene che il teorema della farfalla sia stato pubblicato per la prima volta nel 1815. Si veda a tale proposito Coxeter, Greitzer 1967, pagg. 45-46.

[38] Esistono moltissime dimostrazioni di questo teorema, quasi tutte facilmente reperibili in rete. Quella qui riportata, che è presentata anche su Wikipedia, è la dimostrazione di Coxeter, Greitzer 1967, pag. 45.

sullo stesso arco (teorema 1.3.7); si deduce che $EE" : FF" = AE : CF$. Infine sono simili i triangoli DEE' e BFF', per lo stesso ragionamento rispetto al caso immediatamente precedente; vale dunque che $EE' : FF' = DE : FB$. Ora è possibile manipolare i risultati ottenuti: dalle prime due proporzioni,

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{EE"}{FF'} \cdot \frac{EE'}{FF"}\,;$$

Al secondo membro, sfruttando la terza e la quarta similitudine, si ottiene che:

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{AE}{CF} \cdot \frac{DE}{FB} = \frac{AE \cdot DE}{CF \cdot FB}\,;$$

Si applica adesso il teorema delle corde (teorema 1.10.1) alle corde secanti AD e PQ: ne risulta che $AE \cdot DE = PE \cdot EQ$; si ripeta l'applicazione del medesimo teorema alle corde secanti PQ e CB: segue che $CF \cdot FB = PF \cdot FQ$. Pertanto vale la relazione

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{PE \cdot EQ}{PF \cdot FQ}\,;$$

ma $PE = PQ - EQ$ e $PF = PQ - FQ$, da cui

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{(PM - EM) \cdot (MQ + EM)}{(PM + MF) \cdot (MQ - MF)}\,.$$

Ricordando che M è il punto medio di PQ, $PM = MQ$, quindi;

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{(PM - EM) \cdot (PM + EM)}{(PM + MF) \cdot (PM - MF)} = \frac{PM^2 - EM^2}{PM^2 - MF^2}\,.$$

Si svolga ora l'ultima uguaglianza trovata:

$$\left(\frac{EM}{MF}\right)^2 = \frac{PM^2 - EM^2}{PM^2 - MF^2}\,,$$

ottenendo

$$EM^2(PM^2 - MF^2) = MF^2(PM^2 - EM^2)\,,$$

da cui

$$EM^2 \cdot PM^2 - EM^2 \cdot MF^2 = MF^2 \cdot PM^2 - MF^2 \cdot EM^2\,,$$

dove, semplificando gli addendi uguali $-EM^2 \cdot MF^2$ e dividendo l'uguaglianza per PM^2, si ricava $EM^2 = MF^2$, cioè $EM = MF$, che è quanto si doveva dimostrare.
□