2. Tecniche dimostrative generali

2.1 Dimostrazioni

Una *dimostrazione* è una sequenza di ragionamenti con cui si prova che una certa proposizione matematica è vera ed è, in effetti, l'*unico* strumento che permette di raggiungere questo scopo. Dimostrare che una certa proposizione è vera (ed è quindi un teorema) è l'attività principiale di un matematico.

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, le proposizioni matematiche hanno delle forme precise che sono determinate dall'uso di connettivi e quantificatori e riguardano precisi oggetti matematici che hanno delle loro specifiche proprietà e sui quali sono definite particolari relazioni ed operazioni.

La dimostrazione di un teorema dipenderà sia dalla particolare forma della proposizione (ovvero dalla sua struttura logica) sia dal suo contenuto specifico (quali sono gli oggetti matematici di cui parla). Per il primo aspetto ci viene in aiuto la logica, per il secondo aspetto la conoscenza del determinato campo e dei fatti specifici che lì valgono.

2.1.1 Forma logica dell'enunciato di un teorema

Il teorema più tipico ha la forma di un'implicazione: si chiede di dimostrare che da una ipotesi $\mathbf{I}$ segue una tesi $\mathbf{T}$. A volte questa implicazione può essere pensata come racchiusa da un quantificatore $\forall x \in A(\mathbf{I}(x) \to \mathbf{T}(x))$.

Per esempio nel teorema

Teorema 2.1.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Se n è primo e maggiore di 2, allora n è dispari.*

possiamo pensare che n sia un numero naturale fissato arbitrario, anche se non lo conosciamo, oppure sia una variabile. Nel primo caso penseremo a questa proposizione come una proposizione del tipo $\mathbf{I} \to \mathbf{T}$, nel secondo come a una proposizione del tipo $\forall x \in A(\mathbf{I}(x) \to \mathbf{T}(x))$. Questo ha comunque poca importanza dato che, concretamente, per dimostrare questo tipo di teorema, in effetti, tipicamente assumeremo che n sia un numero naturale fissato arbitrario e ci ricondurremo quindi al caso $\mathbf{I} \to \mathbf{T}$.
Altri teoremi non sono facilmente riconducibili alla forma di implicazione. Ne sono un esempio i teoremi come il seguente

Teorema 2.1.2. *Esiste un numero naturale palindromo primo di tre cifre.*

in cui sembra che non ci sia alcuna ipotesi specifica. Nelle prossime sezioni approfondiremo meglio le varie strategie dimostrative che si possono mettere in campo, anche in relazione alla forma specifica delle eventuali ipotesi e della tesi nell'enunciato di un teorema.

2.1.2 Fatti noti

In base alla forma specifica dell'enunciato di un teorema, la sua struttura logica potrà aiutare il matematico a cercarne la dimostrazione. Tuttavia, come abbiamo detto, un teorema non può essere dimostrato, di solito, senza rifersi agli oggetti di cui parla. Ma quali sono gli strumenti *non-logici* che si possono utilizzare nella dimostrazione di un teorema?
Ogni area della matematica si è sviluppata e dei matematici hanno dimostrato già alcuni teoremi. Questi teoremi possono ovviamente essere utilizzati per dimostrare i nuovi teoremi: una volta dimostrato, un teorema diventa un patrimonio comune dell'umanità. Qui però dobbiamo fare un piccolo distinguo che riguarda le gare di matematica.
Dato che le proposizioni di cui è chiesto di dimostrare la verità non sono teoremi fondamentali o molto difficili della disciplina di riferimento, è possibile che qualche studente, nel mondo, ad esempio tal Giovanni, abbia già risolto lo stesso problema in una esercitazione per preparare una gara di matematica.
Quindi, in linea di principio, chiunque altro dovesse affrontare lo stesso problema più tardi, potrebbe dimostrarlo banalmente dicendo:
"Questo teorema vale, perché l'ha dimostrato Giovanni: è il teorema di Giovanni."

Ovviamente questa soluzione non sarebbe accettata come valida in una gara di matematica, anche se probabilmente sarebbe considerata valida in un articolo scientifico (che ha come unico scopo quello di sviluppare ulteriormente la disciplina matematica), a patto, ovviamente, che Giovanni abbia lasciato una traccia scritta e pubblica della sua dimostrazione.

Nelle competizioni matematiche, almeno fino a un livello nazionale, le dimostrazioni richieste possono essere svolte esclusivamente utilizzando un certo numero limitato di *fatti noti*, molti dei quali elementari. Questi *fatti noti* includono sicuramente tutti i teoremi che uno studente apprende entro il biennio di un liceo scientifico, ma anche qualche risultato ulteriore, ma sempre considerabile *di base*. Chiameremo questo insieme di risultati il *bagaglio base di cultura generale di uno* **studente bravo in matematica**, in breve B1. Certo, uno studente che conosce un gran numero di teoremi, anche più avanzati, di una disciplina (per esempio dell'algebra o della teoria dei numeri o della geometria piana), può utilizzarli, seguendo comunque la regola che questi teoremi devono appartenere a quello che potremmo definire il *bagaglio base di cultura generale di un* **matematico**, in breve B2: se il correttore del problema, che probabilmente è laureato in matematica (o in una materia attigua), non ha idea di che cosa diavolo sia il teorema a cui lo studente si sta riferendo e deve compiere una lunga ricerca su google per trovarne traccia, probabilmente lo studente non sta utilizzando un teorema in B2. In ogni caso, il teorema di Giovanni non è né in B1, né in B2; inoltre chi ha scritto il testo di un problema che si trova sul vostro foglio dei problemi della Gara Nazionale di Cesenatico sicuramente non ha proposto quell'esercizio, perché venga risolto soltanto da chi conosce un teorema ultra-specifico (2-3% dei partecipanti?) e, inoltre, lo sa usare ($< 1\%$). Sarà quindi sufficiente andare a cercare in B1 per trovare uno strumento utile allo scopo.

Ovviamente è difficile tracciare dei confini chiari sia per B1 che per B2, ma utilizzando un po' di buon senso, si può essere almeno sicuri di non uscirvi... Nel seguito del testo, evidenzieremo in grassetto l'uso di *fatti noti*; quelli che utilizzeremo avranno esclusivamente provenienza B1.

2.2 Dimostrazioni dirette

Sicuramente più del 90% delle proposizioni che si devono dimostrare nelle gare di matematica hanno una *dimostrazione diretta*. In maniera poco raffinata potremmo dire che una dimostrazione diretta consiste nell'assumere che l'ipotesi **I** sia vera (se c'è un'ipotesi), e, attraverso ragionamenti leciti, utilizzando risultati specifici dell'ambito matematico del problema (inclusi calcoli algebrici), riuscire a concludere che **T** è vera.

Ovviamente il tipo di percorso che effettueremo per arrivare alla verità di **T** dipenderà dalla forma logica di **T**. Analizziamo ora qualche caso, senza l'ambizione tuttavia di riuscire ad essere onnicomprensivi.

2.2.1 Congiunzione

Se la tesi da dimostrare ha la forma di una congiunzione, ovvero **T** è della forma $P \wedge Q$, si cercherà di dimostrare che se si assume la verità dell'ipotesi la proposizione P è vera, e se si assume la verità dell'ipotesi anche Q è vera.

Esempio 2.2.1. Disuguaglianza tra medie. Dimostrare che se $a, b \in \mathbb{R}$ sono numeri positivi, allora

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Soluzione. Supponiamo che $a, b \in \mathbb{R}$ siano numeri positivi.
Dato che

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0, \tag{2.1}$$

abbiamo che $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 4ab \geq 4ab$. Da questo segue che

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2} \geq \frac{\sqrt{4ab}}{2} = \frac{2\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}.$$

D'altra parte, aggiungendo $a^2 + 2ab + b^2$ a entrambi i membri in 2.1, otteniamo che $2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$.
Da questo segue che

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2}{4}} \geq \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{a+b}{2}.$$

□

2.2.2 Disgiunzione

Se la tesi da dimostrare ha la forma di una disgiunzione, ovvero **T** è della forma $P \vee Q$, si cercherà di dimostrare che, se si assume la verità dell'ipotesi, una tra P e Q è vera. Se l'ipotesi dipende da un arbitrario elemento a in qualche insieme A, il fatto che P sia vera o lo sia Q, potrebbe dipendere dallo specifico a. Tipicamente in questo caso si utilizza la cosiddetta tecnica della *dimostrazione per casi* che vedremo nella sezione 2.4.

Esempio 2.2.2. Sia a un numero naturale di tre cifre multiplo di 3. Sia b il numero che si ottiene sommando le cifre in notazione decimale di a e sia c il numero che si ottiene sommando le cifre in notazione decimale di b. Dimostrare che $c = 3$ o $c = 9$.

Soluzione. Dato che $a \leq 999$, la somma delle sue cifre è al massimo 27. Quindi $b \leq 27$. Da questo segue che $c \leq 10$, dato che il numero minore o uguale a 27 la cui somma delle cifre è più alta è 19. Tuttavia, dato che a è un multiplo di 3, grazie al **criterio di divisibilità per** 3, possiamo dedurre che b è un multiplo di 3 e, per lo stesso motivo, che c è anch'esso un multiplo di 3. Dato che $c \leq 10$ e non può essere 0, dato che la somma delle cifre di a è positiva e dunque pure la somma delle cifre di b lo è, c può essere solo 3 o 9. $\square$

2.2.3 Esistenziale

Se la tesi da dimostrare ha la forma di una proposizione esistenziale $\exists x \in A\, P(x)$, una volta assunta la verità dell'ipotesi, si cercherà di costruire uno specifico elemento a di A (eventualmente dipendente da elementi arbitrari presenti nell'ipotesi) tale che $P(a)$ è vera. Spesso, nella pratica, per individuare un a per cui $P(a)$ è vera, si assume che $P(a)$ sia vera e si cerca di derivare da questo fatto delle proprietà che a dovrebbe soddisfare in tal caso, fino a riuscire a trovare un candidato ragionevole. A questo punto, la dimostrazione della proposizione $\exists x \in A\, P(x)$ consiste semplicemente nel verificare che l'elemento candidato a rende vera $P(a)$.

Esempio 2.2.3. Dimostrare che, per ogni numero naturale positivo n, esistono n numeri naturali consecutivi non primi.

Soluzione. Poniamoci prima in un caso particolare, per esempio il caso $n = 5$, e consideriamo i numeri naturali $6! + 2$, $6! + 3$, $6! + 4$, $6! + 5$ e $6! + 6$. Tali numeri sono chiaramente consecutivi. Inoltre, dato che $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, $6! + 2$ è un multiplo di 2, $6! + 3$ è un multiplo di 3, $6! + 4$ è un multiplo di 4, $6! + 5$ è un multiplo di 5 e $6! + 6$ è un multiplo di 6. Da questo segue che, essendo tutti strettamente maggiori di 6, essi sono tutti non primi.
Utilizziamo la stessa idea per dimostrare il caso generale in cui n è un numero naturale positivo arbitrario. I numeri naturali da $(n + 1)! + 2$ a $(n + 1)! + n + 1$ sono n numeri consecutivi non primi. Infatti, per ogni $j = 1, .., n$, il j-esimo di questi numeri è multiplo di $j + 1$ ed è maggiore di $n + 1$. $\square$

Nel caso in cui venga richiesto di dimostrare non solo l'esistenza, ma anche l'unicità di un $a \in A$ per cui $P(a)$ è vera, una strategia consiste nel procedere come nel caso dell'esistenza e, dopo aver assunto che $P(a)$ è vero, cercare di provare che le conseguenze di questo conducono ad un unico candidato a. In questo caso, questi ragionamenti devono essere parte della dimostrazione, ovviamente. Infine deve essere verificato che l'unico candidato a soddisfa effettivamente $P(a)$.

Esempio 2.2.4. Dimostrare che esiste un'unica coppia di numeri naturali positivi (n, p) con p primo tali che $p^3 - 3 = n^2 + 4n$.

Soluzione. Supponiamo che (n, p) sia una coppia di numeri naturali positivi con p primo tali che $p^3 - 3 = n^2 + 4n$. Allora

$$(n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3 = p^3.$$

Dato che p è un numero primo e $n > 0$, l'unica possibilità è che $n + 1 = p$ e $n + 3 = p^2$. Da questo segue, sottraendo membro a membro queste uguaglianze, che $2 = p^2 - p = p(p-1)$. Dunque $p = 2$ e $n = p - 1 = 1$.
Inserendo nell'equazione i valori $p = 2$ e $n = 1$ si verifica in effetti che la coppia $(1, 2)$ è una soluzione: $2^3 - 3 = 5 = 1^2 + 4 \cdot 1$. □

2.2.4 Negazione

Nel caso in cui la tesi da dimostrare abbia la forma di una negazione $\neg P$, una volta assunta la verità dell'ipotesi cercheremo di dimostrare la falsità di P. Questo caso può essere spesso ricondotto ad altri, dato che la negazione può spesso essere rimossa dalla prima posizione di una proposizione utilizzando gli equivalenti che abbiamo illustrato nella sezione 1.4. In particolare, per quanto riguarda tesi del tipo $\neg\forall x \in A\, P(x)$, esse sono equivalenti alle proposizioni $\exists x \in A\, \neg P(x)$. Quindi la dimostrazione di una tesi del tipo $\neg\forall x \in A\, P(x)$ consiste nel trovare un controesempio, ovvero uno specifico $a \in A$ per il quale $P(a)$ è falsa.

Esempio 2.2.5. Dimostrare che non tutti i numeri del tipo $n^2 + n + 41$ con $n \in \mathbb{N}$ sono primi.

Soluzione. $40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41^2$ non è un numero primo. □
In alternativa si possono utilizzare i metodi indiretti contronominale o per assurdo che vedremo nelle sezioni 2.3 e 2.5.

2.2.5 Universale e Implicazione

Nel caso in cui la tesi da dimostrare abbia la forma di una proposizione universale $\forall x \in A\, P(x)$ o di una implicazione, ci si può ricondurre agli altri casi. Infatti, come abbiamo visto, la proposizione $\mathbf{I} \to (P \to Q)$ è equivalente alla proposizione $\mathbf{I} \wedge P \to Q$; dunque in questo caso basta cambiare l'ipotesi e trasformarla in $\mathbf{I} \wedge P$ e scegliere come nuova tesi Q. Inoltre la proposizione $\mathbf{I} \to \forall x \in A\, P(x)$ è equivalente alla proposizione $\forall x \in A\, (\mathbf{I} \to P(x))$ se $\mathbf{I}$ non contiene la variabile x (e questo possiamo assumerlo senza problemi).

Esempio 2.2.6. Dimostrare che se due insiemi A e B sono tali che $|A \cap B| = 3$, allora, se $|A| = 3$, $A \subseteq B$.

Soluzione. Supponiamo che A e B siano due insiemi tali che $|A \cap B| = 3$ e $|A| = 3$. Dato che $A \cap B \subseteq A$, ne deduciamo che $A \cap B = A$. Questo significa esattamente che ogni elemento di A è anche un elemento di B, ovvero che $A \subseteq B$. $\square$

Esempio 2.2.7. Dimostrare che se ogni numero naturale pari maggiore o uguale di 4 si puó scrivere come somma di due numeri primi, allora ogni numero dispari maggiore o uguale di 7 può essere scritto come somma di tre numeri primi.

Soluzione. Sia n un numero dispari maggiore o uguale a 7 e supponiamo che ogni numero naturale pari maggiore o uguale di 4 si possa scrivere come somma di due numeri primi.
Il numero $n - 3$ è un numero pari maggiore o uguale a 4; dunque esistono numeri primi p e q tali che $n - 3 = p + q$. Da questo segue che $n = p + q + 3$, ovvero che n si può esprimere come somma di tre numeri primi. $\square$

2.2.6 Proposizioni specifiche

Un ultimo caso è quello in cui la tesi da dimostrare sia espressa tramite una proposizione di base di una specifica area della matematica, per esempio l'uguaglianza di due oggetti particolari.

Esempio 2.2.8. Dimostrare che se $n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

Soluzione. Grazie alle **formule sulle combinazioni**, sappiamo che i sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ con j elementi sono $\binom{n}{j}$ per ogni $j = 0, ..., n$. È un fatto noto che **i sottoinsiemi di** $\{1, ..., n\}$ **sono** 2^n. Dato che un sottoinsieme di $\{1, ..., n\}$ deve avere un numero di elementi compreso tra 0 e n (estremi inclusi), $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$. □

Problemi

Problema 1.* Dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 3n^2 + n$ è un multiplo di 6.

Problema 2.* Olimpiadi della matematica, fase d'istituto 1994. Dimostrare che esistono esattamente due numeri interi positivi n tali che $\dfrac{5n + 93}{n + 7}$ è un intero positivo.

Problema 3.* Dimostrare che esiste un numero naturale positivo che è uguale al doppio della somma delle sue cifre in notazione decimale.

Problema 4.* Dimostrare che se a e b sono numeri naturali, allora almeno uno tra ab e $a^2b^2 - 1$ è un multiplo di 3.

Problema 5.* Dimostrare che non tutti i numeri della forma $2^p - 1$, con p un numero primo, sono primi.

Problema 6.** Dimostrare che, per ogni coppia di numeri reali x e y,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Problema 7.** [Barsanti, Conti, Franzoni 1994] Dimostrare che esiste un'unica successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri interi tale che $a_{nm} = (a_n - 1)a_m - n^2 + 1$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$.

Problema 8.* * * Olimpiadi della matematica, fase nazionale 1998** Dimostrare che ogni poliedro convesso ha due facce con lo stesso numero di lati.

2.3 Dimostrazione contronominale

Supponiamo di dover dimostrare che da un'ipotesi **I** segue una tesi **T**.

La tecnica dimostrativa *contronominale* consiste nel dimostrare che dalla negazione della tesi $\neg\mathbf{T}$ segue la negazione dell'ipotesi $\neg\mathbf{I}$, ovvero ipotesi e tesi sono negate e i loro ruoli vengono invertiti. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, le implicazioni $\mathbf{I} \to \mathbf{T}$ e $\neg\mathbf{T} \to \neg\mathbf{I}$ sono logicamente equivalenti, di conseguenza questa tecnica è perfettamente lecita.

Ovviamente non è sempre conveniente usare questo metodo ed è pure difficile trovare una ricetta generale che ci permetta di capire quando lo sia. Tuttavia talvolta lo è: ci sono infatti dei casi in cui c'è una dimostrazione diretta semplice del fatto che da $\neg\mathbf{T}$ segue $\neg\mathbf{I}$, mentre è difficile dare una dimostrazione diretta che da **I** segue **T**. Da un punto di vista puramente pratico, se i tentativi diretti sembrano non aver successo, conviene almeno provare la strada della dimostrazione contronominale.

Un esempio interessante dell'uso di questa tecnica dimostrativa è la dimostrazione del celebre **principio dei cassetti**.

Questo principio afferma che *se metto delle magliette dentro a dei cassetti e le magliette sono più dei cassetti, allora c'è un cassetto che contiene almeno due magliette*.

Anche se questo principio è del tutto evidente, dimostrarlo in modo diretto non è per nulla facile... Ma, come per magia, se usiamo la tecnica contronominale tutto diventa facile. In questo caso, infatti, l'ipotesi **I** è "Ci sono più magliette che cassetti", mentre la tesi **T** è "C'è un cassetto che contiene almeno due magliette" e le loro negazioni sono rispettivamente $\neg\mathbf{I}$ data da "Il numero di magliette è minore o uguale a quello dei cassetti" e $\neg\mathbf{T}$ data da "Tutti i cassetti contengono non più di una maglietta", e da $\neg\mathbf{T}$ segue immediatamente $\neg\mathbf{I}$.

Se vogliamo formalizzare il principio dei cassetti in modo più astratto (così da poterlo applicare a casi diversi da quelli strettamente domestici), possiamo innanzitutto trasformare i cassetti in insiemi $A_1,....A_n$, identificando i cassetti con il loro contenuto. Un fatto sottinteso nella formulazione del principio dei cassetti è che una maglietta non può essere in due cassetti contemporaneamente: questa condizione è tradotta nel fatto che gli insiemi $A_1,...,A_n$ sono a due a due disgiunti, ovvero che, presi comunque due di essi distinti, la loro intersezione è vuota. La frase "Le magliette sono più dei cassetti" diventa "$A_1 \cup ... \cup A_n$ contiene strettamente più di n elementi" (e si può scrivere in modo compatto come $|A_1 \cup ... \cup A_n| > n$). La tesi infine diventa "Almeno uno degli insiemi $A_1,....A_n$ contiene almeno due elementi" (ovvero "Esiste $i \in \{1,...,n\}$ tale che $|A_i| > 1$").

Il teorema da dimostrare diventa quindi

Teorema 2.3.1 (Principio dei cassetti)**.** *Siano $A_1, ..., A_n$ insiemi a due a due disgiunti. Se $|A_1 \cup ... \cup A_n| > n$, allora esiste $j \in \{1, ..., n\}$ tale che $|A_j| > 1$.*

Soluzione. Supponiamo che $A_1, ..., A_n$ siano insiemi a due a due disgiunti e usiamo la tecnica di dimostrazione *contronominale.*
La negazione della tesi è "Per ogni $j \in \{1, .., n\}$, $|A_j| \leq 1$" e da questo segue che

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_n| \leq \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n\text{volte}} = n.$$

Ma $|A_1 \cup A_2 .... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$, perché gli insiemi $A_1 ... A_n$ sono a due a due disgiunti. Otteniamo quindi che $|A_1 \cup ... \cup A_n| \leq n$: questa è esattamente la negazione dell'ipotesi. □

Vediamo ora un po' di esempi di uso della tecnica dimostrativa contronominale. Cominciamo da un problema classico di cui è difficile rintracciare l'origine.

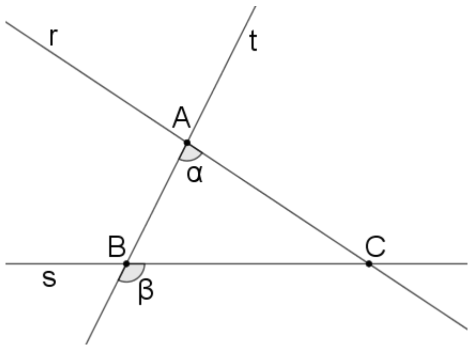
Esempio 2.3.1. Supponiamo di avere una scacchiera quadrata con un numero di caselle dispari per ogni lato e che in ogni casella ci sia esattamente un cavallo. Dimostrare che non è possibile muovere contemporaneamente tutti i cavalli (con una e una sola mossa da cavallo per ogni cavallo) ottenendo come risultato finale che in ogni casella della scacchiera ci sia ancora uno ed un solo cavallo.

Dimostrazione. Procediamo con una dimostrazione contronominale. Supponiamo di riuscire a compiere l'operazione richiesta su di una scacchiera quadrata. Dato che ogni cavallo, dopo essere stato mosso, passa da una casella di un colore a quella del colore opposto, il numero di caselle bianche deve essere uguale al numero di caselle nere nella scacchiera. Questo in particolare implica che la scacchiera ha un numero di caselle pari. Da questo segue che il numero di caselle in un lato è pari. □

Il prossimo esempio è tratto dalla geometria piana. Si tratta di una delle dimostrazioni che vengono solitamente presentate nei primi anni di scuola secondaria di secondo grado.

Esempio 2.3.2. Dimostrare che se due rette r e s, tagliate da una retta trasversale t, formano angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.

Soluzione. Supponiamo che valga la negazione della tesi, ovvero che le rette r ed s non siano parallele. Allora r e s si incontrano in un punto C. Se denotiamo con A e B i punti di intersezione della retta t con le rette r ed s rispettivamente, allora ABC è un triangolo e ogni coppia di angoli alterni è formata da un angolo α interno del triangolo ABC e da un angolo esterno β relativo ad un altro vertice di ABC. In particolare α e β non sono congruenti, perché un **angolo esterno di un triangolo è sempre strettamente maggiore degli angoli interni ad esso non corrispondenti**. Questa è la negazione dell'ipotesi.



□

Vediamo ora un altro esempio, decisamente più complesso, di uso della tecnica contronominale; si tratta di un problema di combinatoria.

Esempio 2.3.3. Sia $\mathcal{F}$ un insieme di sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$. Dimostrare che se per ogni $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$, allora $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

Soluzione. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia un insieme di sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ e usiamo la tecnica *contronominale*. La negazione della tesi è "$|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$", mentre la negazione dell'ipotesi è "Esistono $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $A \cap B = \emptyset$".
Supponiamo dunque che $|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$ e definiamo l'insieme $\mathbf{A}$ come segue:

$$\mathbf{A} := \{\{I, \{1, ..., n\} \setminus I\} | \, I \subseteq \{1, ..., n\}\}.$$

$\mathbf{A}$ è una partizione dell'insieme $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$ dei sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$.
I suoi elementi sono tutte le possibili coppie non ordinate di sottoinsiemi di $\{1, ..., n\}$ che siano complementari (per esempio, se $n = 5$, uno degli elementi di $\mathbf{A}$ è la coppia $\{\{1, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$).

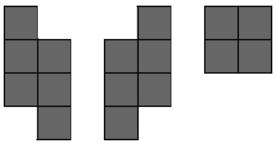
L'insieme $\mathbf{A}$ ha inoltre, come elementi, 2^{n-1} sottoinsiemi $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{2^{n-1}}$ dell'insieme $\mathcal{P}(\{1, ..., n\})$, dato che $\{1, ...n\}$ ha 2^n sottoinsiemi e ogni elemento di $\mathbf{A}$ contiene esattamente due di questi sottoinsiemi.
Se consideriamo gli insiemi $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{F}, ..., \mathcal{A}_{2^{n-1}} \cap \mathcal{F}$ possiamo notare che essi sono a due a due disgiunti e che $(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{F}) \cup \cdots \cup (\mathcal{A}_{2^{n-1}} \cap \mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Dato che $|\mathcal{F}| > 2^{n-1}$, per il **principio dei cassetti**, esiste $i \in \{1, ..., 2^{n-1}\}$ tale che $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{F}$ contiene almeno 2 elementi e, dato che $|\mathcal{A}_i| = 2$, questo significa che $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{F}$ contiene esattamente due elementi; per la definizione di $\mathbf{A}$, questi due elementi sono due insiemi disgiunti che appartengono a $\mathcal{F}$. Abbiamo dunque dimostrato che esistono $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $A \cap B = \emptyset$. □

Problemi

Dimostrare, utilizzando la tecnica della dimostrazione contronominale, i seguenti problemi.

Problema 9. * Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n^3 + 3n + 1$ è un multiplo di 3, allora n non è multiplo di 3.

Problema 10. ** Dimostrare che se una tabella rettangolare ha un lato con un numero dispari di caselle non è possibile piastrellarla utilizzando piastrelle di questi tipi:



Problema 11. ** Sia P un polinomio monico a coefficienti interi di grado $n > 2$ con tutte le radici intere negative e sia p un numero primo. Dimostrare che se $n \neq p$, allora non può accadere che allo stesso tempo il termine noto sia p e il coefficiente del termine di grado $n-1$ sia $2p-1$.

Problema 12. ** **Olimpiadi della matematica, fase provinciale 2013.** In uno schema 10×10 di battaglia navale è nascosta una sola portaerei delle dimensioni di 5×1. Giulio afferma, e ha ragione, "Con n tentativi riuscirò a colpire almeno una volta la tua portaerei". Dimostrare che $n \geq 20$.

Problema 13. *** **Olimpiadi della matematica, stage di Cortona 1997.** Dimostrare che se $P_1, ..., P_7$ sono poligoni di area unitaria contenuti in un quadrato di lato 2, allora esistono i e j in $\{1, ..., 7\}$ con $i \neq j$ tali che $\text{area}(P_i \cap P_j) \geq \frac{1}{7}$.

2.4 Dimostrazione per casi

Supponiamo ancora di voler dimostrare che dall'ipotesi **I** segue **T**, ma questa volta supponiamo anche di sapere (o di aver dimostrato) che l'ipotesi **I** può essere ridotta alla forma di una disgiunzione $\mathbf{I}_1 \lor \mathbf{I}_2 \lor ... \lor \mathbf{I}_n$, ovvero, in parole povere, che l'ipotesi può essere suddivisa in diversi casi (non necessariamente incompatibili tra loro). Allora possiamo procedere come segue: possiamo dimostrare che **T** segue da **I**, dimostrando che essa segue da ognuno dei casi $\mathbf{I}_i$ (per $i = 1, ..., n$).
Illustriamo subito questa tecnica con un esempio molto semplice.

Esempio 2.4.1. Dimostrare che se n è un numero naturale che non è un multiplo di 3, allora $n^2 - 1$ è un multiplo di 3.

Soluzione. Se n è un numero naturale che non è un multiplo di 3, allora ci sono due casi possibili:

1. $n = 3k + 1$ per qualche $k \in \mathbb{N}$;

2. $n = 3h + 2$ per qualche $h \in \mathbb{N}$.

Nel primo caso $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$.
Nel secondo $n^2 - 1 = (3h + 2)^2 - 1 = 9h^2 + 12h + 4 - 1 = 3(3h^2 + 4h + 1)$.
In entrambi i casi $n^2 - 1$ è un multiplo di 3. Possiamo quindi concludere. □

Vediamo ora un esempio classico tratto dalla teoria dei numeri in cui si utilizza sia la tecnica contronominale che quella della dimostrazione per casi. Si tratta di una proprietà legata a particolari numeri primi detti *numeri primi di Mersenne*.

Esempio 2.4.2. Dimostrare che se n è un numero naturale tale che $2^n - 1$ è primo, allora n è un numero primo.

Soluzione. Per dimostrare il teorema, basta dimostrare che se $n \in \mathbb{N}$ non è primo, allora nemmeno $2^n - 1$ lo è (*tecnica contronominale*).
Se n non è primo, allora ci sono tre casi possibili: $n = 0$, $n = 1$ o $n = ab$ per qualche coppia di numeri naturali $a > 1$ e $b > 1$.
Consideriamo questi casi uno alla volta.

1. Se $n = 0$, allora $2^n - 1 = 2^0 - 1 = 0$ non è primo.

2. Se $n = 1$, allora $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 1$ non è primo.

3. Se $n = ab$, $a > 1$ e $b > 1$, allora $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)\sum_{i=0}^{b-1} 2^{ia}$; dato che $a > 1$, $2^a - 1 > 2 - 1 = 1$ e, dato che $a > 1$ e $b > 1$, $\sum_{i=0}^{b-1} 2^{ia} \geq 2^{a(b-1)} + 1 > 1$, quindi $2^n - 1$ non è primo.

In tutti i casi si deduce che $2^n - 1$ non è primo. Possiamo dunque concludere. $\square$

Il prossimo esercizio è una variazione di un esercizio di combinatoria della fase nazionale delle Olimpiadi della Matematica del 1995.

Esempio 2.4.3. Diciamo che una coppia ordinata di numeri naturali (n, m) è minore di una coppia ordinata (n', m') (in simboli $(n, m) < (n', m')$) se $n \leq n'$ e $m \leq m'$ e almeno una delle due disuguaglianze vale strettamente. Dimostrare che ogni insieme $A \subseteq \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \, 1 \leq n, m \leq 10\}$ tale che $|A| = 20$ contiene tre coppie (a, b), (c, d), (e, f) tali che $(a, b) < (c, d) < (e, f)$.

Soluzione. Rappresentiamo la situazione con una tabella 10×10 in cui le righe sono numerate dal basso all'alto dall' 1 al 10 e le colonne sono numerate da sinistra a destra dall' 1 al 10. Una coppia (n, m) è rappresentata dalla casella che si trova nella riga n e nella colonna m. Inoltre una coppia (a, b) è minore di una coppia (c, d) se e solo se (c, d) non si trova più in basso o più a sinistra di (a, b) nella tabella. Possiamo rappresentare l'insieme A annerendo le caselle corrispondenti ai suoi elementi. Una volta annerite le caselle, distinguiamo tre casi.

1. C'è almeno una riga della tabella con almeno tre caselle annerite.

2. C'è almeno una colonna della tabella con almeno tre caselle annerite.

3. Su ogni riga e su ogni colonna ci sono esattamente due caselle annerite.

Nel primo caso tre caselle annerite sulla stessa riga soddisfano le richieste della tesi. Nel secondo caso tre caselle annerite sulla stessa colonna soddisfano le richieste della tesi. Nel terzo caso, basta considerare le due caselle annerite sulla prima riga $(1, a)$ e $(1, b)$ con $a < b$ e poi la casella (c, b) con $c > 1$ annerita. $\square$

Si noti che nella dimostrazione precedente i tre casi non sono a due a due incompatibili. Mentre infatti il caso 1. *e il caso* 2. *sono incompatibili con* 3.*, il caso* 1. *e il caso* 2. *possono entrambi verificarsi per alcuni sottoinsiemi A, ad esempio nel caso in cui $A = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \, 1 \leq n \leq 4; \, 1 \leq m \leq 5\}$.*

Vediamo ora un esempio tratto dall'algebra dove si usa sia la tecnica contronominale che la tecnica della dimostrazione per casi.

Esempio 2.4.4. Olimpiadi della matematica, fase provinciale 2002. Supponiamo che P sia un polinomio a coefficienti reali di secondo grado. Dimostrare che non è possibile che $P(2000) = 2000$, $P(2001) = 2001$ e $P(2002) = 2002$.

Soluzione. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali e supponiamo che valga la negazione della tesi. Questo significa che $P(2000) = 2000$, $P(2001) = 2001$ e $P(2002) = 2002$, ovvero che il polinomio $P(x) - x$ ha 2000, 2001 e 2002 come radici. Da questo segue che esiste un polinomio a coefficienti reali $Q(x)$ tale che

$$P(x) - x = (x - 2000)(x - 2001)(x - 2002)Q(x).$$

Quindi $P(x) = x+(x-2000)(x-2001)(x-2002)Q(x)$ e possiamo quindi distinguere due casi: se $Q(x) = 0$, allora $P(x)$ ha grado 1, mentre se $Q(x)$ è diverso da 0, allora $P(x)$ ha grado maggiore o uguale a 3. In entrambi i casi il grado di $P(x)$ è diverso da 2. Abbiamo dunque dimostrato la negazione dell'ipotesi. $\square$

La tecnica della dimostrazione per casi si può utilizzare anche quando un fatto da dimostrare non è riconducibile alla forma $\mathbf{I} \to \mathbf{T}$. Si può infatti sempre sfruttare il cosiddetto *principio del terzo escluso*, che abbiamo già presentato nel capitolo precedente, ovvero la tautologia $P \vee \neg P$ che è vera qualunque sia la proposizione P. In particolare, quindi, $P \vee \neg P$ può sempre essere aggiunta come ipotesi nella dimostrazione di un teorema. Ovviamente, affinché questo trucco sia utile, P deve essere scelta in modo da essere conveniente, ma purtroppo non c'è una regola fissa per capirlo a priori. Una volta scelta P, si può utilizzare la tecnica della dimostrazione per casi e cercare di dimostrare la tesi sia a partire da P che da $\neg P$. Come sempre, un esempio vale più di mille parole.

Esempio 2.4.5. Dimostrare che esistono numeri irrazionali a e b tali che a^b è un numero razionale.

Soluzione. Ovviamente

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \text{ o } \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}.$$

1. Nel primo caso ho concluso, perché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$[1].

[1] Il lettore troverà una dimostrazione di questo fatto nella prossima sezione

2. Nel secondo caso basta considerare $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{2}$ che è irrazionale, infatti $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}$. $\square$

È interessante notare che nella dimostrazione appena svolta abbiamo distinto due casi e, anche se non siamo riusciti a stabilire quale dei due valga, siamo riusciti a concludere. La situazione è alquanto diversa però dal caso in cui "dividiamo" in diversi casi un'ipotesi del tipo "n è ..." in cui n è una variabile che sta per un numero arbitrario. Infatti in questa situazione, spesso ogni caso sarà vero per la scelta specifica di un numero particolare. Qui invece sappiamo a priori che solo uno tra i due casi è vero, ma non sappiamo quale. La situazione è alquanto bizzarra. In realtà, si può dimostrare che $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Problemi

Problema 14. * Dimostrare che tutti i quadrati perfetti danno resto 0 o 1 nella divisione per 4.

Problema 15. * Dimostrare, utilizzando le tecniche dimostrative contronominale e della dimostrazione per casi, che se a, b, c sono numeri naturali tali che $a^2 + b^2 + c^2$ è un quadrato perfetto e $\mathsf{MCD}(a, b, c) = 1$, allora esattamente due di essi sono pari.

Problema 16. ** Se n è un numero naturale, denotiamo con $\widetilde{n}$ il numero che si ottiene invertendo le cifre in notazione decimale del numero n (ignorando lo 0 finale, nel caso). Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di numeri naturali positivi tale che a_0 è un numero composto e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} := a_n + \widetilde{a_n}$ nel caso in cui a_n si scriva in notazione decimale con un numero pari di cifre, mentre a_{n+1} è il numero che si ottiene scrivendo in notazione decimale consecutivamente le cifre di $\widetilde{a_n}$ ed a_n, altrimenti. Dimostrare che nella successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ci sono numeri primi.

Problema 17. *** [Teorema di Ramsey] Dimostrare che se sei persone si trovano in uno scompartimento di un treno, ce ne sono tre che si conoscono a vicenda o tre che non si conoscono a vicenda. Dimostrarlo per casi.

Problema 18. *** **Olimpiadi della Matematica, stage di Cortona 1999.** Dimostrare che, se p è un numero primo, non esistono $a, n > 1$ interi tali che $2^p + 3^p = a^n$. Utilizzare la tecnica della dimostrazione per casi.