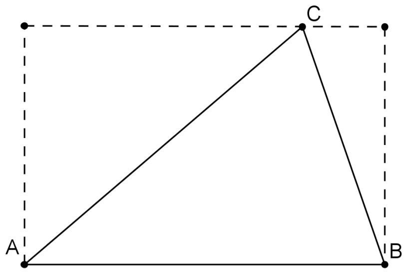
1. Problemi introduttivi

La maggior parte dei problemi olimpici richiedono solo la conoscenza della geometria piana che si studia al primo biennio di una scuola superiore. Tra questi, numerosi sono gli esercizi che si possono risolvere anche con gli strumenti più elementari, come ad esempio la formula per calcolare l'area di un triangolo o le proprietà di un triangolo isoscele.

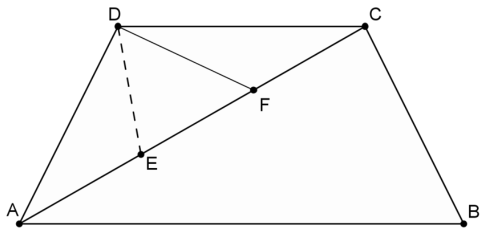
Esempio 1.1. (*Giochi di Archimede 2011, gara biennio*)
Sia ABC un triangolo acutangolo. Costruiamo un rettangolo che abbia un lato coincidente con AB e contenga il punto C sul lato opposto ad AB. Facciamo la stessa costruzione partendo dal lato BC e dal lato CA, ottenendo così tre rettangoli. Allora sicuramente i tre rettangoli hanno: a) perimetri uguali; b) aree uguali; c) somma delle lunghezze delle diagonali uguali; d) uguale rapporto tra lato maggiore e lato minore; e) nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.

Soluzione. È immediato rendersi conto che il rettangolo disegnato ha area doppia di quella del triangolo, dato che ha la stessa base e la stessa altezza. Ma tale caratteristica è propria di ciascuno dei tre rettangoli, quindi la risposta corretta è la b: le aree sono tutte uguali.



Si trova facilmente un controesempio per le altre risposte: se si prende un triangolo rettangolo isoscele, infatti, si può agevolmente calcolare che sono false sia la risposta a, sia la c, sia la d. □

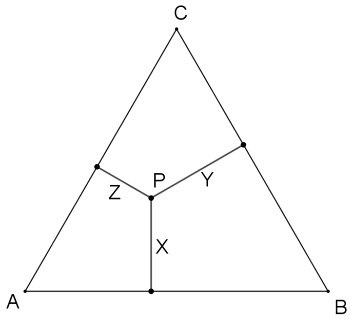
Esempio 1.2. (*Quaestio Copernicana*[1], *maggio 2009*)
In un trapezio qualunque $ABCD$ la base maggiore AB è il triplo della minore DC. Si divida la diagonale AC in tre parti congruenti tramite i punti E e F. Calcolare il rapporto fra l'area totale del trapezio $ABCD$ e l'area del triangolo DEF.



Soluzione. Si inizi con l'osservare che i triangoli AED, EFD e FCD sono equiestesi in quanto i segmenti AE, EF e CD sono congruenti per costruzione, e tutti e tre hanno per altezza la distanza fra D ed AC. Dunque l'area del triangolo DEF è un terzo dell'area di ACD. Si noti ora che l'area di ACD è a sua volta un terzo di quella del triangolo ABC: infatti ABC ha per base AB e per altezza la distanza di C da AB; mentre ACD ha per base CD, che è un terzo di AB, e la medesima altezza. Pertanto l'area di ACD è un quarto dell'area del trapezio; l'area di DEF è un terzo dell'area del triangolo ACD; e, in conclusione, l'area di DEF è un dodicesimo di quella del trapezio $ABCD$. Quindi il rapporto richiesto vale 12. □

[1]La *Quaestio Copernicana* è stata dal 2008 al 2011 una gara interna al Liceo Copernico di Udine. Si veda Càssola, Antoniali, Lamanna 2012.

Esempio 1.3. (*Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione suppletiva 2004*)
Dato un triangolo equilatero, preso un punto P al suo interno o sul suo perimetro, siano x, y, e z le distanze di P dai lati. La somma $x + y + z$ risulta: a) sempre maggiore dell'altezza del triangolo; b) sempre minore dell'altezza; c) sempre uguale all'altezza; d) i dati non sono sufficienti per rispondere.



Soluzione. Si considerino i tre triangoli ABP, BCP e CAP. Ciascuno di essi ha come base un lato (la cui lunghezza chiamiamo l) e come altezza la distanza di P da tale lato; sia h l'altezza del triangolo. La somma delle aree dei tre triangoli è ovviamente uguale all'area di ABC. Dunque:

$$\frac{1}{2}(l \cdot x + l \cdot y + l \cdot z) = \frac{1}{2} l \cdot h$$

da cui, con calcoli elementari, si ricava che la risposta corretta[2] è la *c*. □

Dall'esempio precedente si può dedurre un'interessante conseguenza:

Lemma 1.1. (*Generalizzazione del Teorema di Viviani*) Dato un poligono regolare di lato l e area $\mathcal{A}$ e un suo punto interno P, la somma delle distanze di P dai lati (o dai loro prolungamenti) è costante, e vale $2\mathcal{A}/l$.

Esempio 1.4. (*Quaestio Copernicana, dicembre 2009*)
In un esagono regolare la somma delle distanze di un punto interno da ciascuno dei lati vale 12. Calcolare il lato dell'esagono.

Soluzione. Per il Lemma 1.1, risulta $12 = 2\mathcal{A}/l$. Ma l'area di un esagono regolare di lato l equivale a quella di sei triangoli equilateri aventi tale lato; dunque $\mathcal{A} = 6 \cdot (\frac{1}{2} l \frac{\sqrt{3}}{2} l) = \frac{3}{2}\sqrt{3} l^2$. Pertanto $l = 4\frac{\sqrt{3}}{3}$. □

[2] Questa proprietà dei triangoli equilateri è nota anche come *Teorema di Viviani*, dal nome del matematico italiano Vincenzo Viviani (1622-1703).

2. Teorema di Pitagora

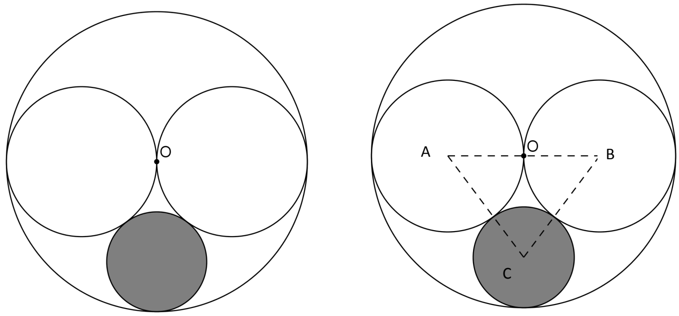
Il Teorema di Pitagora è uno degli strumenti cardine nella risoluzione di innumerevoli esercizi, come avviene d'altra parte anche nella matematica scolastica. Lo stesso accade, come si vedrà nel volume II, anche in geometria solida.

Teorema 2.1. *(Teorema di Pitagora[1]) Dato un triangolo rettangolo, il quadrato che ha per lato l'ipotenusa ha area uguale alla somma delle aree dei due quadrati che hanno per lato ciascuno dei due cateti. In simboli: sia a l'ipotenusa, siano b e c i cateti del triangolo rettangolo: $a^2 = b^2 + c^2$.*

Esempio 2.1. (*Giochi di Archimede 1992, gara triennio*)
Nella figura a pagina seguente il cerchio grande ha centro in O e raggio 1. Quanto vale il raggio del cerchio più piccolo?
a) $1/4$; b) $5/18$; c) $2\sqrt{3}/9$; d) $1/3$; e) nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Soluzione. Si tracci il triangolo ABC, dove A, B e C sono i centri delle tre circonferenze, come in figura. Sia r il raggio incognito. Il triangolo ACO è rettangolo in O, il segmento AO è lungo $1/2$, mentre $AC = 1/2 + r$; $OC = 1 - r$.

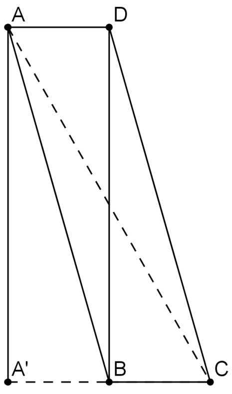
[1] Il teorema è attribuito a Pitagora di Samo (vissuto probabilmente intorno al VI secolo a.C.). L'enunciato era noto prima del VI secolo, ma la prima dimostrazione completa si trova negli *Elementi* di Euclide (Elementi, I, 47). A proposito di Euclide si veda capitolo 4, nota 4.



Applicando il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) in ACO si ottiene: $\left(\frac{1}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r)^2$. Con facili passaggi si deduce che $r = 1/3$, quindi la risposta corretta è la d. □

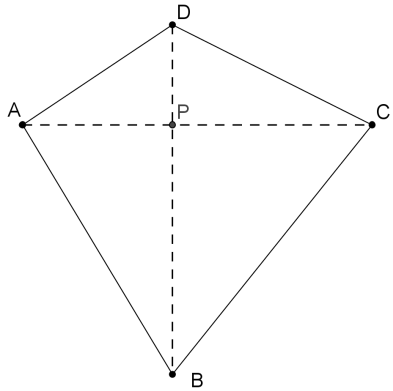
Esempio 2.2. In un parallelogramma $ABCD$ avente lati $AB = 23$ e $BC = 7$ la diagonale minore BD è perpendicolare a BC. Qual è la lunghezza della diagonale maggiore AC?

Soluzione. Se il parallelogramma viene disegnato sulla base BC, la diagonale BD è una sua altezza.



Si proietti allora A sul prolungamento di BC; sia A' la proiezione. $A'B$ è lungo 7 perché $A'BDA$ è un rettangolo. La diagonale AC è ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti $A'C = A'B + BC = 14$ e $AA' = BD$; ma per ipotesi (Teorema di Pitagora, 2.1) $BD^2 = AB^2 - AD^2$. Quindi $AC^2 = A'C^2 + BD^2 = A'C^2 + AB^2 - AD^2 = 14^2 + 23^2 - 7^2$, da cui si ottiene $AC = 26$. □

Esempio 2.3. * (*Gara a squadre on line*[2], *ottobre 2010*)
"La piattaforma è un quadrilatero irregolare, le cui diagonali sono perpendicolari tra loro. Due lati opposti valgono rispettivamente 373 mm e $\sqrt{373}$ mm. Il rapporto fra le due diagonali è 45/47. I quattro segmenti in cui si dividono le diagonali incrociandosi sono espressi, in mm, tutti da numeri interi e il più piccolo dei quattro giace sulla diagonale maggiore." (...) Quanto vale l'area della piattaforma in mm^2? (Dare la risposta divisa per 10).



Soluzione. Poniamo $AD = \sqrt{373}$, $BC = 373$; è inoltre noto che il segmento di diagonale più piccolo appartiene alla diagonale maggiore. Sia dunque P il punto di intersezione delle diagonali e poniamo $PD < PB$. Per il Teorema di Pitagora (Teorema 2.1) $AP^2 + PD^2 = 373$. Noto che AP e PD devono essere numeri interi, si ottiene per tentativi che le loro lunghezze sono 7 e 18; evidentemente il segmento minore, PD, vale 7. Sappiamo dai dati che

$$\frac{AC}{BD} = \frac{18 + PC}{7 + PB} = \frac{45}{47}\,.$$

Deve pertanto accadere che 47 divide (7+PB), cioè la lunghezza di PB è congrua a -7 modulo 47. I possibili valori di PB sono: 40, 87, ... 275, ... 369. Nel triangolo PBC l'ipotenusa vale 373, quindi 369 è il valore massimo possibile per PB. Sapendo che $PB^2 + PC^2 = 373^2$, si procede anche in questo caso a tentativi per ottenere che gli unici valori possibili sono: $PB = 275$ e $PC = 252$. In conclusione, le diagonali del quadrilatero valgono 282 e 270: l'area è 282·270/2=38070. La risposta è 3807. □

[2] Le "Gare a squadre on line" citate in molti esercizi di questa raccolta sono quelle del sito *www.phiquadro.it*, gestito dall'infaticabile amico e collega Sandro Campigotto. In bibliografia sono indicate le pubblicazioni che contengono testi e svolgimenti di alcune gare svoltesi su questo sito, di cui ho l'onore di essere un collaboratore (Campigotto 2011 e Campigotto 2013).

3. Problemi

Problema 1 (*Giochi di Archimede 2015, gara triennio*)
Un triangolo possiede una bisettrice e una mediana tra loro perpendicolari, di lunghezze, rispettivamente, 7 e 8. Qual è l'area del triangolo?
a) 36; b) 35; c) 42; d) 48; e) 28.

Problema 2 (*Teorema di Viviani generalizzato*[1])
Sia P un punto interno o sui lati di un triangolo qualsiasi, e siano X, Y, Z le distanze di P dai lati o dai prolungamenti dei lati. Se h_1, h_2, h_3 sono le altezze del triangolo rispettivamente parallele a X, Y, Z, dimostrare che $X/h_1 + Y/h_2 + Z/h_3 = 1$.

Problema 3 * (*Gara a squadre on line, dicembre 2010*)
Marco, per realizzare un albero di carta, prende un foglio di carta quadrata $ABCD$ di lato 24 cm. Dopo avere eseguito la prima piega in modo che il vertice C vada a coincidere col punto medio M del lato AB, si ferma e si chiede: quanto vale l'area di $ECFG$, cioè della parte comune tra fronte e retro del foglio?

Problema 4
In un trapezio $ABCD$ di basi AB e CD si considerino i segmenti paralleli alle basi. Dimostrare che:

[1] Si veda il Teorema di Viviani, Esempio 1.3, e il Lemma 1.1; si veda anche l'Esempio 6.1.

- il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui è la media aritmetica fra le basi;
- il segmento che divide $ABCD$ in due trapezi simili è la media geometrica delle basi;
- il segmento che divide $ABCD$ in due trapezi equivalenti è la media quadratica delle basi;
- il segmento passante per il punto d'incontro delle diagonali è la media armonica delle basi.

Problema 5 * (*American Mathematics Competition, 1966*)
Nel triangolo ABC le mediane AM e CN si incontrano in O. Sia P il punto medio di AC, e MP intersechi CN in Q. Se l'area del triangolo OMQ è a, calcolare l'area di ABC.

Problema 6 * (*Gara a squadre on line, marzo 2010*)
Una semicirconferenza è inscritta in un quadrilatero $ABCD$ in modo che il diametro della semicirconferenza giaccia su BC e il punto medio di BC coincida col centro della semicirconferenza. Se AB=16 cm e CD=18 cm, quanto misura BC? (Dare come risposta $BC \cdot 100$).

Problema[2] 7
Si consideri un semicerchio di diametro AB; sia P un punto sul suo diametro. Tracciati i semicerchi di diametro AP e PB, si disegni la perpendicolare ad AB passante per P; sia Q il punto in cui essa interseca la semicirconferenza. Dimostrare che l'area compresa fra il semicerchio grande e i due piccoli (chiamata da Archimede[3] "arbelo" o "trincetto del calzolaio") è equivalente a quella del cerchio di diametro PQ.

Problema 8 * (*Gara a squadre on line, febbraio 2011*)
Sfuggiti alle forze imperiali, Han e Leila decisero di cercare rifugio presso la "Città delle nuvole", base spaziale e capitale del pianeta Bespin. La città volante era sorretta da una base antigravitazionale quadrata e la città era costruita al centro della base sulla parte comune ai 4 triangoli equilateri costruiti internamente alla

[2] La dimostrazione costituisce la proposizione 4 del Libro dei Lemmi, attribuito ad Archimede. Secondo lo storico della matematica Eduard Dijksterhuis, il Libro dei Lemmi, giunto fino a noi attraverso una versione araba, non è di Archimede; è possibile, tuttavia, che derivi da un'opera di Archimede andata perduta. Una variante dell'esercizio è stata assegnata all'Esame di Stato Liceo Scientifico, sessione straordinaria 2009.

[3] Archimede di Siracusa (287?-212 a.C.), matematico e fisico greco.

base a partire dai lati. Se l'area del quadrato era di $450+250\sqrt{3}$ ui^2 (ui= Unità Imperiali), qual era l'area (in ui^2) su cui era costruita la città?

Problema 9 (*Tratto da Coxeter, Greitzer 1967*)
Dimostrare che, se un quadrilatero di lati a, b, c e d è contemporaneamente inscrivibile in una circonferenza e circoscrivibile a una circonferenza, il quadrato della sua area è pari ad $abcd$.

Problema 10 * (*Gara a squadre on line, ottobre 2010*)
Era necessario uscire dall'U-boat quanto prima. Un tubo lanciasiluri!!! Jones fu folgorato dalla malsana idea di trasformarsi in un siluro e farsi sparare fuori dal sommergibile. Sul pannello di controllo, per non dimenticarsi il codice di lancio, qualcuno aveva appuntato: "è dato un triangolo scaleno di lati 13, 14 e 15 cm. Si costruisca il simmetrico del triangolo rispetto al baricentro. Il codice di lancio è l'area della parte comune ai due triangoli."