1. Induzione

1.1 Principio di induzione

Indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ una proprietà riguardante i numeri naturali, cioè una famiglia di predicati dipendenti dalla variabile naturale n, come negli esempi di seguito riportati:

- la somma di tutti i numeri naturali da 1 a n è $\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- il prodotto di 4 numeri naturali consecutivi $n(n+1)(n+2)(n+3)$ è divisibile per 24;
- il numero minimo di mosse per smontare e rimontare la torre di n dischi nel famoso gioco *La Torre di Hanoi* è $2^n - 1$.

Dimostrare la validità delle precedenti asserzioni sostituendo di volta in volta un cospicuo (quanto?) numero di valori alla variabile n e verificando che per tali valori le proprietà sono valide, non è sicuramente l'approccio matematico idoneo, essendo infiniti i valori attribuibili alla variabile n e non avendo garanzia alcuna sulla validità della proprietà per i naturali non utilizzati come test. Tuttavia l'approccio potrebbe servire per farsi un'idea di come funzionino le cose e, in caso positivo, sospettare che funzionino sempre.
Ad esempio, osservando che i prodotti $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$ e così via, sono tutti divisibili per 24, è lecito congetturare che il prodotto di 4 numeri naturali consecutivi sia sempre divisibile per 24.

Analogamente, se nell'espressione $n^2 + n + 41$ sostituiamo a n i numeri naturali a partire da 0 fino a 20, ci accorgiamo che i numeri ottenuti sono tutti primi; alla stessa conclusione arriviamo se continuiamo a sostituire i naturali da 21 a 30. È lecito quindi congetturare che l'espressione $n^2 + n + 41$ generi sempre numeri primi qualunque sia il valore attribuito a n. In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, la supposizione fatta è però falsa in quanto per $n = 41$ si ottiene il numero $41^2 + 41 + 41 = 41^2 + 2 \cdot 41 = 41 \cdot (41 + 2) = 41 \cdot 43$ che non è primo.
La dimostrazione della validità di una certa proprietà deve essere eseguita in maniera rigorosa e universale (cioè per tutti i possibili valori di n). In tal senso uno strumento di grande utilità è il *Principio di induzione matematica*, utilizzato per la prima volta dal matematico Francesco Maurolico (1494-1575) e la cui formulazione, equivalente all'assioma P5, è la seguente.

Principio di induzione. *Sia $\mathcal{P}(n)$ una proprietà su $\mathbb{N}$. Se*

i) $\mathcal{P}(0)$ *è vera e*

ii) supponendo vera $\mathcal{P}(n)$, segue che è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$ (cioè è vero che $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$),

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

L'idea che sta alla base di questo principio è la seguente: sapendo che se la proprietà è vera per un certo numero naturale n, è vera anche per il successivo $n + 1$, basta dimostrarne la validità per $n = 0$ e sarà vera per ogni n. Infatti, se è vera per $n = 0$ sarà vera per il successivo $n = 1$, se è vera per $n = 1$ sarà vera anche per il successivo $n = 2$, quindi per $n = 3$, $n = 4$ e così via, passo dopo passo, come un effetto domino, sarà vera per ogni n. Parlando in maniera informale, si può associare il Principio di induzione a una scala infinita, i cui gradini sono i numeri naturali: se una persona è in grado di salire sul primo gradino e, nel momento in cui si trova su un qualsiasi gradino, è in grado di salire sul gradino successivo, allora riuscirà a salire tutti i gradini della scala.
È sufficiente, quindi, dimostrare la proprietà per $n = 0$ (*passo base*) (solitamente è una semplice verifica) e l'implicazione $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (*passo induttivo*) (è la parte più laboriosa). L'ipotesi "$\mathcal{P}(n)$ vera" è altresì detta *ipotesi induttiva*.
A volte, come vedremo più avanti, si dimostra una certa proprietà per $n \geq k$, con $k > 0$ intero. In tal caso il passo base va verificato per $n = k$ e non per $n = 0$.
Iniziamo con l'analizzare il primo esempio di applicazione del Principio di induzione, dovuto a Maurolico, riguardante il comportamento della somma dei primi n interi

positivi dispari. Per valori piccoli di n otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1+3 &= 4, \\ 1+3+5 &= 9, \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25, \\ 1+3+5+7+9+11 &= 36, \\ 1+3+5+7+9+11+13 &= 49, \\ 1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64. \end{aligned}$$

Osservando i valori ottenuti (tutti quadrati perfetti), si può congetturare che la somma dei primi n numeri dispari dia sempre un quadrato perfetto, nella fattispecie n^2. La figura seguente rafforza la bontà della congettura formulata.

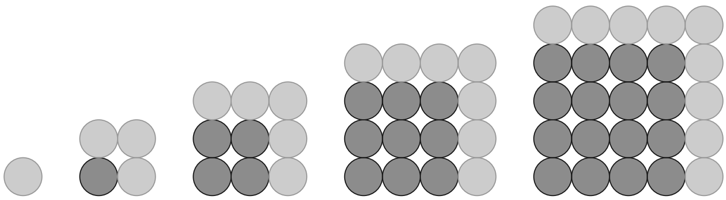

Figura 1.1: i primi cinque quadrati.

Il Principio di induzione permette, in effetti, di confermare la validità di tale congettura.

Esempio 1.1.1. Dimostriamo che $1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1) = n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (cioè la somma dei primi n numeri dispari è il quadrato del numero dei termini).

Soluzione. *Passo base.* Proviamo la tesi per $n = 1$. In tal caso essa è banalmente vera perché si ottiene $1 = 1^2$.
Passo induttivo. Supponiamo la tesi vera per n, cioè supponiamo vera la relazione $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ e dimostriamo che

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+2(n+1)-1 = 1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2.$$

Si ha

$$\underbrace{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}_{=n^2 \text{ per ip. induttiva}}+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

cioè abbiamo dimostrato che è vera l'implicazione $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Per il Principio di induzione la tesi è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. □

Esempio 1.1.2. Dimostrare che la cifra delle decine di ogni potenza di 7 è pari.

Soluzione. Osserviamo subito che i casi significativi si hanno a partire dalla potenza 7^2, pertanto supporremo che nella potenza 7^n, l'esponente n sia maggiore o uguale a 2. Dimostreremo la proprietà per induzione su n.
Passo base. Si ottiene per $n = 2$ e in tale caso la tesi è vera ($7^2 = 49$).
Passo induttivo. Supponiamo che 7^n abbia la cifra delle decine pari e dimostriamolo per 7^{n+1}. A tal fine osserviamo che le possibili cifre delle unità di una potenza di 7 sono $1, 7, 9, 3$ (si ripetono ciclicamente). Pertanto, essendo $7^{n+1} = 7^n \cdot 7$, dette A e B le cifre rispettivamente delle decine (pari per ipotesi induttiva) e delle unità di 7^n, possono verificarsi i seguenti 4 casi:

a) $B = 1$. In tal caso il prodotto $7B$ non dà riporto e quindi la cifra delle decine di 7^{n+1} coincide con la cifra delle unità di $7A$, che è pari;

b) $B = 7$. In tal caso il prodotto $7B$ dà riporto 4 e quindi la cifra delle decine di 7^{n+1} coincide con la cifra delle unità di $7A + 4$, che è pari;

c) $B = 9$. In tal caso il prodotto $7B$ dà riporto 6 e quindi la cifra delle decine di 7^{n+1} coincide con la cifra delle unità di $7A + 6$, che è pari;

d) $B = 3$. In tal caso il prodotto $7B$ dà riporto 2 e quindi la cifra delle decine di 7^{n+1} coincide con la cifra delle unità di $7A + 2$, ancora una volta pari.

La cifra delle decine di 7^{n+1} risulta sempre essere pari e quindi è vera l'implicazione $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Per il Principio di induzione, la tesi è vera per ogni $n \geq 2$.□

1.2 Principio dei cassetti

Un famoso principio equivalente al Principio di induzione è il *Principio dei cassetti* (nomenclatura di uso in Francia), altrimenti detto Pigeonhole (Inghilterra) o

Principio della piccionaia o ancora Principio di Dirichlet (Russia). Esso è stato formulato per la prima volta dal matematico tedesco Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) ed è un ragionamento abbastanza evidente basato più sulla logica di tutti i giorni che non sul formalismo matematico. È sicuramente evidente che

"se 10 piccioni vengono messi in 9 gabbie, almeno una gabbia conterrà almeno due piccioni"

"se sulla lavagna si scrivono 51 numeri interi naturali, almeno 6 di essi avranno la stessa cifra delle unità."

Formalmente, quanto detto sopra si può così enunciare:

PRINCIPIO DEI CASSETTI. *Se n oggetti vengono riposti in k cassetti, con $k < n$, allora esisterà almeno un cassetto contenente almeno due oggetti.*

Gli esempi che di seguito proponiamo mostrano come applicare il Principio dei cassetti nella risoluzione di problemi matematici.

Esempio 1.2.1. Dimostrare che in un gruppo di 20 persone, ne esistono almeno 2 che hanno lo stesso numero di amici all'interno del gruppo (si supponga che se x è amico di y allora y è amico di x).

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che non possono esistere due persone che contemporaneamente hanno rispettivamente 0 e 19 amici. Infatti, detta x la persona avente 19 amici, ognuno di tali 19 persone ha x come amico e quindi tutti hanno almeno un amico nel gruppo. Pertanto, tutti i possibili numeri di amici costituiscono un sottoinsieme di $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 18\}$ oppure di $\{1, 2, 3, \ldots, 19\}$, entrambi contenenti 19 elementi. Essendo 20 le persone del gruppo, per il Principio dei cassetti, esisteranno almeno due persone aventi lo stesso numero di amici.$\square$

PRINCIPIO DEI CASSETTI GENERALIZZATO. *Se $nk + 1$ oggetti vengono riposti in k cassetti, allora esisterà almeno un cassetto contenente almeno $n + 1$ oggetti.*

Ad esempio, se volessimo riporre 31 calzini in 5 cassetti, allora almeno un cassetto conterrebbe 7 calzini (si osservi che in questo caso $k = 5$ e $n = 6$).

Esempio 1.2.2. Scelti 51 interi distinti compresi tra 1 e 100, dimostrare che ne esistono almeno due tali che uno è divisibile per l'altro.

Soluzione. Osserviamo che ogni intero considerato si può scrivere nella forma $2^k \cdot a$, con $k \in \mathbb{N}$ e a intero dispari. L'intero a può assumere uno dei 50 valori $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 97, 99$. Essendo 51 gli interi scelti e 50 i possibili fattori dispari, per il Principio dei cassetti esistono almeno due interi distinti divisibili entrambi per lo stesso fattore dispari a. Siano $x = 2^r \cdot a$ e $y = 2^s \cdot a$ tali interi, con $r \neq s$. Di conseguenza

1. se $r < s$, y è divisibile per x;
2. se $r > s$, x è divisibile per y.

In ogni caso resta provato che uno dei due è divisibile per l'altro. □

Esempio 1.2.3. Un maestro di scacchi ha 15 settimane di tempo per prepararsi a un torneo. Decide di giocare almeno una partita al giorno ma non più di 12 a settimana. Dimostrare che esiste una successione di giorni consecutivi durante i quali il maestro di scacchi ha giocato esattamente 29 partite.

Soluzione. Sia a_i il numero di partite giocate dal maestro fino al giorno i-esimo, $i = 1, 2, 3, \ldots 105$. Evidentemente risulta

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{104} < a_{105} \leq 180.$$

Aggiungendo 29 a ognuno degli a_i, si ottiene una nuova successione (traslata) di interi così fatta:

$$30 \leq a_1 + 29 < a_2 + 29 < a_3 + 29 < \ldots < a_{104} + 29 < a_{105} + 29 \leq 209.$$

Consideriamo i 210 interi $a_1, a_2, \ldots, a_{105}, a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{105} + 29$. Essendo ognuno di essi compreso tra 1 e 209, per il Principio dei cassetti ne esistono almeno due uguali tra loro. Siano essi a_k e $a_j + 29$ (non possono essere entrambi dello stesso tipo), con $j < k$ (non può essere $j \geq k$ in quanto, se così fosse, non sarebbe vera l'uguaglianza $a_k = a_j + 29$ in quanto $a_k \leq a_j$).
Essendo $a_j + 29$ il numero di partite giocate fino al giorno k-esimo (in quanto $a_j + 29 = a_k$), segue che il maestro ha giocato complessivamente 29 partite nei giorni $j + 1, j + 2, \ldots, k$.
Resta così dimostrato che esiste una successione di giorni consecutivi in cui il maestro ha giocato esattamente 29 partite. □

Problemi Proposti

Problema 1.** Dimostrare che il prodotto di quattro numeri naturali consecutivi qualsiasi è sempre divisibile per 24.

Problema 2.** Dimostrare che in un gruppo di n persone, ce ne sono almeno due che hanno lo stesso numero di amici all'interno del gruppo.

Problema 3.* Dati n punti distinti in un piano, a tre a tre non allineati, dimostrare che il numero di rette che è possibile tracciare congiungendo i punti a due a due in tutti i modi possibili è uguale a $\frac{n(n-1)}{2}$.

Problema 4.** Dimostrare che $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5.** Presi 101 punti distinti appartenenti a un quadrato di lato 1 (i punti possono essere interni o appartenere al perimetro del quadrato), dimostrare che ne esistono almeno due interni a un cerchio di raggio $\frac{9}{125}$.

Problema 6.** Dati 50 interi positivi distinti e minori o uguali di 144, dimostrare che tra essi ne esistono almeno due la cui differenza vale 2, 3 oppure 5.

Problema 7.** Siano dati 5 punti a coordinate intere. Dimostrare che almeno due di essi sono tali che il punto medio del segmento che li congiunge ha coordinate intere.

Problema 8.* In una scatola di legno sono contenute alcune matite colorate. Per ogni colore vi è lo stesso numero di matite. Per avere la certezza di prendere una matita blu, naturalmente senza poterla scegliere, bisogna estrarne 25, e per essere certi di prendere tutte le matite di uno stesso colore bisogna invece estrarne 29. Quante matite ci sono nella scatola?

Problema 9.** Dimostrare che in un qualsiasi poliedro ci sono sempre almeno due facce aventi lo stesso numero di lati.

Problema 10.** Ad una gara a squadre di scacchi, ogni squadra gareggia contro ciascuna delle altre una sola volta. Dimostrare che, nel corso dello svolgimento della gara, ci sono sempre almeno due squadre che hanno giocato lo stesso numero di partite.