1. Poliedri: superficie e volume

Definizione 1.1. Si dice *poliedro* un solido delimitato da un insieme finito di facce piane poligonali aventi a due a due uno spigolo in comune. Un poliedro è *convesso* se, presi due punti al suo interno o sulla sua superficie e tracciato il segmento che li congiunge, il segmento risulta interamente appartenente al poliedro[1]; in caso contrario il poliedro si dice *non convesso* o *concavo*.

Fra i principali poliedri: prisma (eventualmente retto), parallelepipedo (eventualmente rettangolo), cubo (caso particolare del parallelepipedo rettangolo), piramide (eventualmente retta; Definizione 1.8). I poliedri regolari e altri poliedri interessanti per l'ambito delle gare matematiche saranno trattati con maggiore dettaglio più avanti, nei Capitoli 11 e 12.

Definizione 1.2. Dato un prisma, si disegni un piano non parallelo alle due basi, che intersechi tutti gli spigoli laterali del prisma. Le due parti in cui il prisma è suddiviso prendono il nome di *prisma troncato*.

Nella tabella seguente è esposto un riassunto dei dati rilevanti relativi ai poliedri più comuni. Non capiterà spesso, si tenga presente, di incontrare problemi che si riducono a una pedissequa applicazione di qualcuna di queste formule. Molti esercizi (e quelli qui presentati non fanno eccezione) richiedono soluzioni più fantasiose che coinvolgono altri concetti geometrici.

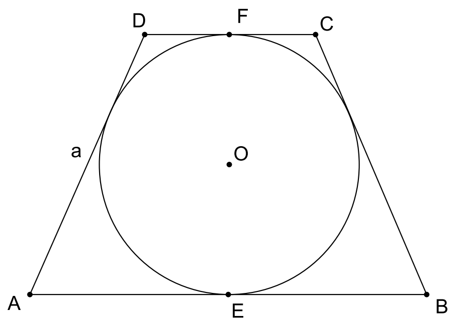
[1] Cioè se l'intersezione fra il segmento e il poliedro coincide col segmento stesso.

Tabella I

Poliedro	Parametri	Area	Volume
Prisma	A_b area di base A_l area laterale h altezza	$2A_b + A_l$	$A_b \cdot h$
Prisma retto	A_b area di base h altezza $2p_b$ perimetro di base	$2A_b + 2p_b \cdot h$	$A_b \cdot h$
Parallelepipedo rettangolo	a, b, c spigoli	$2(ab + bc + ca)$	abc
Cubo	l spigolo	$6l^2$	l^3
Piramide	A_b area di base A_l area laterale h altezza	$A_b + A_l \cdot h$	$\frac{1}{3}A_b \cdot h$
Piramide retta	A_b area di base h altezza a apotema $2p_b$ perimetro di base	$A_b + p_b \cdot a$	$\frac{1}{3}A_b \cdot h$
Tronco di piramide retta	A_B area base magg. A_b area base min. h altezza A_l Area laterale	$A_B + A_b + A_l$	$\frac{h}{3}\big(A_B + A_b + {}$ ${}+\sqrt{A_B \cdot A_b}\big)$

Esempio 1.1. (*Tratto da Prasolov, Sharygin 1989, Problema 6.59*)
In un tronco di piramide retta quadrangolare regolare, in cui l'altezza di una faccia laterale è pari ad a, è possibile inscrivere una sfera. Trovare l'area della superficie laterale del tronco di piramide.

Soluzione. Le facce laterali del tronco di piramide sono trapezi isosceli, congruenti fra loro. Consideriamo l'altezza di uno di tali trapezi che congiunge il punto medio della base maggiore con quello della minore: per motivi di simmetria il punto di tangenza fra la sfera e la faccia deve appartenere proprio a questo segmento. Sezioniamo allora la figura con un piano verticale passante per i punti medi di due facce laterali opposte. La sezione del tronco è ancora un trapezio isoscele, circoscritto a una circonferenza, avente lati obliqui lunghi a. Ma essendo il trapezio $ABCD$ circoscritto a una circonferenza, sono uguali le somme di ciascuna coppia di lati opposti (*Geometria piana per le gare di matematica*, Lemma 8.2).



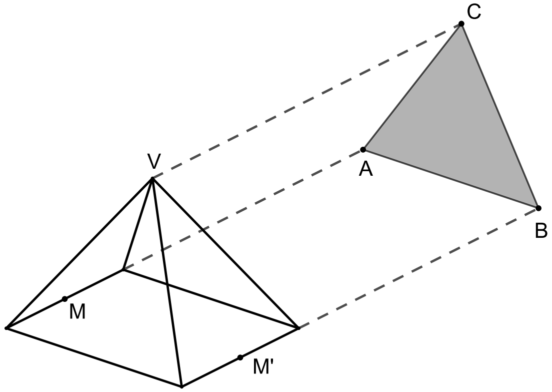
Dunque $AB + CD = 2a$. Dato che l'area laterale del tronco è quattro volte l'area di una delle facce, si ha $4 \cdot \frac{(AB+CD)a}{2} = 4a^2$.
L'esercizio si potrebbe svolgere facilmente anche tenendo conto che l'area non dipende dal particolare tronco di piramide esaminato, pertanto è possibile considerare il caso limite in cui la sfera sia inscritta in un cubo. In tal caso le facce laterali sono quadrati, che hanno tutte altezza (e lato) pari ad a (che in questo caso coincide col diametro della sfera); l'area laterale è la somma delle aree di quattro quadrati di lato a, quindi $4a^2$. □

Esempio 1.2. (*Gara a squadre on line*[2], *5 ottobre 2009*)
Alla NASA è stato disegnato un nuovo prototipo di razzo vettore a forma di parallelepipedo con base quadrata di lato 5 metri, sormontato da una piramide. Sul disegno del progetto, la proiezione di quest'ultima sul piano verticale risulta essere un triangolo equilatero. Dovendo ricoprire l'intera superficie laterale della piramide di piastrelle refrattarie di area 1 dm^2 (anche di forme diverse), quante piastrelle dovranno essere usate?

Soluzione. Si deve calcolare la superficie laterale di una piramide (evidentemente retta, altrimenti la proiezione non potrebbe essere un triangolo equilatero)[3] a base quadrata di lato 5. Di questa piramide non si conosce l'apotema. Il testo del problema informa che il triangolo ABC (triangolo proiezione) è equilatero; ma allora, detti M e M' i punti medi dei due spigoli di base paralleli alla proiezione, anche VMM' è equilatero. Quindi l'apotema VM è congruente al segmento MM', che a sua volta è congruente a un lato di base della piramide. Dunque l'apotema è uguale a 5.

[2] Gare a squadre di allenamento organizzate dal professor Sandro Campigotto sul suo sito internet *www.phiquadro.it*.

[3] Si suppone tacitamente che la proiezione sia parallela (Definizione 4.1).

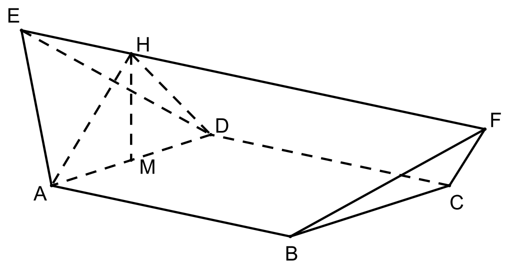


L'area laterale della piramide è

$$p_b \cdot a = 10 \cdot 5 = 50\,.$$

Il risultato è in metri quadri, e va trasformato in decimetri quadri affinché si possa calcolare il numero di piastrelle da 1 dm^2: 50 m^2=5000 dm^2. La risposta è 5000. □

Esempio 1.3. * (*American Invitational Mathematical Examination*[4]*, 1983*)
$ABCD$ è un quadrato di lato $6\sqrt{2}$. Il segmento EF è parallelo al piano del quadrato e ha lunghezza $12\sqrt{2}$. Le facce BCF e ADE sono triangoli equilateri. Qual è il volume del solido $ABCDEF$?



Soluzione. Per iniziare osserviamo che il segmento EF è parallelo ai segmenti AB e CD. Sezioniamo la figura tramite un piano verticale passante per lo spigolo AD. Ciò determinerà sul segmento EF un punto H. Se immaginiamo di compiere la medesima operazione con un piano verticale passante per BC, il solido $ABCDEF$

[4]Competizione statunitense propedeutica alla partecipazione alle olimpiadi nazionali (USAMO), a volte abbreviata con l'acronimo *AIME*.

può essere visto come la somma di un prisma di base triangolare ADH e altezza AB con due piramidi simmetriche e quindi congruenti (in figura è mostrata la piramide $ADHE$). Per calcolare i volumi troviamo la lunghezza del segmento HM. Per motivi di simmetria si ha che $EH = \frac{EF-AB}{2} = 3\sqrt{2}$. Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo EHM: esso è rettangolo in H (HM è altezza e mediana del triangolo isoscele[5] ADH ed EF è parallelo ad AB e CD). L'ipotenusa EM è altezza di un triangolo equilatero di lato $6\sqrt{2}$, e pertanto è lunga $3\sqrt{6}$. Dunque si ottiene che $HM^2 = EM^2 - EH^2 = 54 - 18 = 36$, perciò $HM = 6$. Il volume del prisma sarà

$$\mathcal{V}_{prisma} = \mathcal{A}_{ADH} \cdot AB = \left(\frac{1}{2} AD \cdot HM\right) \cdot AB = 216\,.$$

Passiamo ora a determinare il volume della piramide $ADHE$. Vista sulla base ADH, essa ha la stessa area di base del prisma e ha altezza EH. Il suo volume si calcolerà in questo modo:

$$\mathcal{V}_{ADHE} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ADH} \cdot EH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot AD \cdot HM\right) \cdot EH = 36\,.$$

In conclusione, il volume del solido $ABCDEF$ è dato dalla somma dei volumi parziali, e vale $216 + 36 + 36 = 288$. □

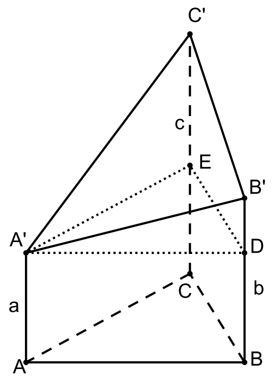
Lemma 1.3. Dato un prisma troncato (Definizione 5.2) a base triangolare, sia $\mathcal{A}_b$ l'area della sua base perpendicolare agli spigoli laterali; siano a, b e c le lunghezze degli spigoli laterali[6]. Il volume del prisma troncato vale

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot \frac{a+b+c}{3}\,.$$

Dimostrazione. Sia ABC la base del prisma troncato; siano $AA' = a$, $BB' = b$ e $CC' = c$ gli spigoli laterali, e $A'B'C'$ la faccia obliqua. Senza perdita di generalità, sia $a \leq b \leq c$. Diremo inoltre $\mathcal{A}_b$ il valore dell'area di ABC. Sechiamo il prisma con un piano parallelo al piano della base e passante per A'. Esso divide il prisma troncato in due solidi: il prisma retto $ABCA'DE$, avente area di base $\mathcal{A}_b$ e altezza a, e il solido $DEA'B'C'$. Questo, a sua volta un prisma troncato, può essere visto anche come una piramide sulla base $EDB'C'$, che è un trapezio rettangolo. Dato che il piano $A'DE$ è perpendicolare agli spigoli del prisma, l'altezza della piramide coincide con l'altezza del triangolo DEA' rispetto alla base DE; sia h il valore di tale altezza.

[5] *Geometria piana per le gare di matematica*, Teorema 5.9.

[6] Evidentemente non congruenti, trattandosi di un prisma troncato.



Dunque il volume della parte superiore del solido è

$$\mathcal{V}_{DEA'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{EDB'C'} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{(C'E + B'D) \cdot ED}{2} \cdot h\,.$$

Osserviamo che $\frac{1}{2}ED \cdot h$ è pari all'area del triangolo DEA', a sua volta pari all'area $\mathcal{A}_b$ della base del prisma. Ma $C'E = c - a$ e $B'D = b - a$, quindi

$$\mathcal{V}_{DEA'B'C'} = \frac{1}{3}[(c-a) + (b-a)] \cdot \mathcal{A}_b\,.$$

Calcoliamo ora il volume totale $\mathcal{V}$ del prisma troncato.

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}_{ABCA'DE} + \mathcal{V}_{DEA'B'C'} = \mathcal{A}_b \cdot a + \mathcal{V}_{DEA'B'C'} = \\ &= \mathcal{A}_b \cdot a + \frac{1}{3}[(c-a) + (b-a)] \cdot \mathcal{A}_b = \mathcal{A}_b \cdot \frac{a+b+c}{3}\,.\end{aligned}$$

Ciò è quanto si doveva dimostrare. □

Esempio 1.4. Un prisma troncato ha per base un triangolo isoscele avente i due lati obliqui lunghi 17 e il terzo lato 16. Noto che uno dei suoi spigoli laterali è lungo 20 e un altro 40, e che il volume totale è 2400, calcolare la lunghezza del terzo spigolo laterale.

Soluzione. Il triangolo di base è isoscele. La sua altezza, calcolata rispetto al lato di lunghezza 16, si calcola col Teorema di Pitagora: $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$. Pertanto l'area della base del prisma troncato è $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Sia x la lunghezza dello spigolo ignoto. Il volume, in base al Lemma 5.3, si può calcolare in questo modo: $2400 = 120 \cdot \frac{20+40+x}{3}$. Con semplici calcoli, si ottiene che la lunghezza del terzo spigolo laterale è zero, e cioè che la base e la faccia obliqua del prisma hanno un punto in comune. □

2. Problemi

Problema 1 (*American Mathematical Competition, 2007*)
Da un cubo di lato unitario sono tagliati via i vertici in modo che ogni faccia diventi un ottagono regolare. Qual è il volume totale dei tetraedri rimossi?
a) $\frac{5\sqrt{2}-7}{3}$ b) $\frac{10-7\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{8\sqrt{2}-11}{3}$ e) $\frac{6-4\sqrt{2}}{3}$

Problema 2 * (*Tratto da Baroncini et al. 2012, pag. 662*)
Un prisma triangolare ha basi ABC e $A'B'C'$ e spigoli laterali AA', BB' e CC'. Siano M e N i punti medi rispettivamente di $A'B'$ e $A'C'$. (a) Dimostrare che i punti B, C, M e N sono complanari. (b) Sia P il punto di intersezione di BM e CN; dimostrare che M e N sono i punti medi dei segmenti BP e CP. (c) Dimostrare che i punti A, A' e P sono allineati. (d) Dimostrare che i segmenti CM e BN si intersecano in un punto K che divide ciascuno dei segmenti in due parti di cui una è doppia dell'altra.

Problema 3 (*Olimpiadi della matematica, gara nazionale, 2015*)
Sia dato un parallelepipedo rettangolo $ABCDA'B'C'D'$, dove $ABCD$ è la faccia inferiore con le lettere assegnate in senso orario, e A, B, C, e D stanno sotto A', B', C', e D' rispettivamente. Il parallelepipedo è diviso in otto pezzi da tre piani ortogonali fra loro e paralleli alle facce del parallelepipedo. Per ogni vertice P del parallelepipedo si indichi con V_P il volume del pezzo di parallelepipedo che contiene P. Sapendo che $V_A = 40$, $V_C = 300$, $V_{B'} = 360$ e $V_{C'} = 90$, qual è il volume del parallelepipedo $ABCDA'B'C'D'$?

Problema 4 (*Olimpiadi di Matematica di Mosca, 1952*)
Dimostrare che, se tutte le facce di un parallelepipedo sono parallelogrammi congruenti, allora tutte le facce sono rombi.

Problema 5
Dimostrare che le diagonali di un parallelepipedo concorrono in un punto.

Problema 6 * (*International Mathematical Olympiad*[1]*, 1968*)
Dimostrare che in ogni tetraedro esiste almeno un vertice tale che i tre spigoli da esso uscenti sono lati di un triangolo.

Problema 8 (*Crux Mathematicorum, vol. 1, n. 10, dicembre 1975; Olimpiadi della matematica*[2]*, gara nazionale, 1991*)
Dimostrare che non esiste un poliedro con sette spigoli[3].

Problema 9 (*Tournament of the towns, 2002*)
Esiste un prisma regolare a base triangolare che possa essere interamente ricoperto, senza sovrapposizioni, da fogli di carta a forma di triangolo equilatero, ammettendo che sia permesso piegare i fogli triangolari attorno agli spigoli del prisma?

Problema 10 * (*Olimpiadi nazionali Canada, 1976*)
Quattro punti A, B, C e D sono disposti in modo che gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{DAB}$ siano tutti retti. Dimostrare che i punti sono complanari.

[1] Il problema è stato proposto dalla Polonia.

[2] Il testo del problema proposto alle olimpiadi italiane era: “per quali valori di n esiste un poliedro convesso avente n spigoli?”

[3] Questo celebre problema è stato formulato per la prima volta da Leonhard Euler in una lettera all’amico Christian Goldbach (1690-1764).