2.5 Dimostrazione per assurdo

Supponiamo di dover dimostrare che da un'ipotesi $\mathbf{I}$ segue la tesi $\mathbf{T}$. La tecnica dimostrativa *per assurdo* consiste nell'assumere che valgano sia l'ipotesi $\mathbf{I}$ che la negazione della tesi $\neg\mathbf{T}$ e derivare da queste una contraddizione.
Questa contraddizione può avere diverse forme: per esempio si può dimostrare, partendo da $\mathbf{I}$ e $\neg\mathbf{T}$ la negazione di un teorema che sappiamo valere (un *fatto noto*), oppure si può derivare da $\mathbf{I}$ una certa proposizione P e da $\neg\mathbf{T}$ la sua negazione $\neg P$; da queste otteniamo che vale $P \wedge \neg P$, e questo è sempre falso. Oppure, ancora, si può derivare da $\mathbf{I}$ e $\neg\mathbf{T}$ insieme la negazione dell'ipotesi $\neg\mathbf{I}$.
Nel caso in cui il teorema che si vuole dimostrare non sia riconducibile alla forma $\mathbf{I} \to \mathbf{T}$, ma sia semplicemente un enunciato $\mathbf{T}$, la tecnica dimostrativa per assurdo consiste nel dimostrare una contraddizione a partire dall'assunzione della negazione dell'enunciato del teorema $\neg\mathbf{T}$.
Un esempio di dimostrazione per assurdo che ogni studente prima o poi incontra nel proprio percorso scolastico, è il seguente.

Esempio 2.5.1. Dimostrare che se p è primo, allora $\sqrt{p}$ è irrazionale.

Soluzione. Supponiamo che p sia un numero primo e che $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$.

1. Dal fatto che $\sqrt{p}$ è razionale segue che esistono due numeri naturali positivi a e b tali che $\mathsf{MCD}(a,b) = 1$ e $\frac{a}{b} = \sqrt{p}$.

2. Dal fatto che p è un numero primo, segue che se c e d sono numeri naturali positivi tali che $\sqrt{p} = \frac{c}{d}$, allora, dato che $d\sqrt{p} = c$ e quindi $d^2p = c^2$, p deve essere un divisore di c^2 e dunque di c; in particolare $c = pk$ per qualche $k \in \mathbb{N}$ e dunque $pd^2 = p^2k^2$ da cui segue che $d^2 = pk^2$ da cui segue, come sopra, che d è un multiplo di p; dunque p divide sia c che d e in particolare $p|\mathsf{MCD}(c,d)$ da cui segue che $\mathsf{MCD}(c,d) \neq 1$.

Dunque dal fatto che $\sqrt{p}$ è razionale deriviamo la proposizione

$$\exists a, b \in \mathbb{N}^+ \left(\frac{a}{b} = \sqrt{p} \wedge \mathsf{MCD}(a,b) = 1\right)$$

mentre dal fatto che p è primo deriviamo la proposizione

$$\forall c, d \in \mathbb{N}^+ \left(\frac{c}{d} = \sqrt{p} \to \mathsf{MCD}(c,d) \neq 1\right)$$

dove $\mathbb{N}^+ := \{n \in \mathbb{N} | \, n > 0\}$. Queste proposizioni sono una equivalente alla negazione dell'altra. Dunque abbiamo derivato una contraddizione. $\square$

Proponiamo ora una dimostrazione per assurdo, un po' diversa dal solito, di un risultato di base della teoria dei numeri.

Esempio 2.5.2. Dimostrare che esistono infiniti numeri primi.

Soluzione. Dimostriamo il teorema per assurdo. Supponiamo che esista un numero finito di numeri primi e che essi siano dunque $p_1, ..., p_n$ con $n > 0$ (so che il 2 è primo). Il numero $p_1 .... p_n + 1$, ovvero il successore del prodotto di tutti i numeri primi, dà resto 1 nella divisione per ognuno dei numeri primi e dunque non è multiplo di nessun numero primo. Dunque deve essere 1, dato che sappiamo che ogni altro numero ha un divisore primo.[3] Ma $p_1 .... p_n + 1 > 1$. Ho dunque una contraddizione. □

Vediamo un altro esempio.

Esempio 2.5.3. Olimpiadi della matematica, stage di Cortona 2000. In una gara di matematica vengono assegnati $n > 4$ problemi. Al termine della correzione risulta che ogni problema è stato risolto correttamente da esattamente 3 concorrenti, che per ogni coppia di problemi esattamente un concorrente ha risolto correttamente entrambi e che c'è un concorrente che ha risolto correttamente almeno 4 problemi. Dimostrare che un concorrente ha risolto correttamente tutti i problemi.

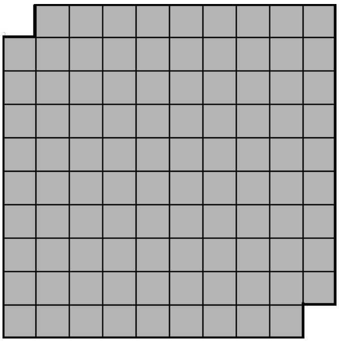
Soluzione. Procediamo per assurdo. Supponiamo che valgano le ipotesi e che nessun concorrente abbia risolto correttamente tutti i problemi.
Sia dunque P un concorrente che ha risolto correttamente almeno quattro problemi. Considero quattro dei problemi che ha risolto $\mathsf{P1}, \mathsf{P2}, \mathsf{P3}, \mathsf{P4}$.
Dato che ogni problema è stato risolto correttamente da esattamente 3 persone gli insiemi dei concorrenti che hanno risolto $\mathsf{P1}, \mathsf{P2}, \mathsf{P3}, \mathsf{P4}$ saranno rispettivamente del tipo $\{P, A1, A2\}, \{P, B1, B2\}, \{P, C1, C2\}, \{P, D1, D2\}$. Ora, data la condizione sulle coppie di problemi i concorrenti $A1$, $A2$, $B1$, $B2$, $C1$, $C2$, $D1$ e $D2$ sono tutti distinti.
Supponiamo che $\mathsf{P5}$ sia un problema che P non ha risolto (deve esistere un tale problema dato che abbiamo assunto che nessun concorrente ha risolto tutti i problemi).
L'insieme dei risolutori del problema $\mathsf{P5}$ deve avere esattamente un elemento in comune con ognuno degli insiemi $\{P, A1, A2\}, \{P, B1, B2\}, \{P, C1, C2\}, \{P, D1, D2\}$,

[3] Per una dimostrazione si veda il prossimo capitolo.

perché sappiamo per ipotesi che esattamente un concorrente ha risolto correttamente la coppia di problemi $\{\mathsf{P1}, \mathsf{P5}\}$, e lo stesso vale per le coppie $\{\mathsf{P2}, \mathsf{P5}\}$, $\{\mathsf{P3}, \mathsf{P5}\}$ e $\{\mathsf{P4}, \mathsf{P5}\}$.
Dato che P non ha risolto P5, il problema deve essere stato dunque risolto da uno tra $A1$ e $A2$, da uno tra $B1$ e $B2$, da uno tra $C1$ e $C2$ e da uno tra $D1$ e $D2$. Quindi il problema P5 deve essere stato risolto da almeno quattro persone.
Questo determina una contraddizione dato che sappiamo per ipotesi che ogni problema è stato risolto esattamente da tre persone. Possiamo dunque concludere.
□

Il prossimo esercizio è un classicissimo della matematica olimpica.

Esempio 2.5.4. Dimostrare che è impossibile piastrellare con mattonelle 2×1 un pavimento come quello della figura.



Soluzione. Coloriamo di nero e di bianco le caselle del pavimento come se fosse una scacchiera. Chiaramente un colore è meno presente dell'altro: quello che colora le caselle della diagonale che va dall'alto a sinistra al basso a destra. Supponiamo che sia possibile piastrellare il pavimento con le mattonelle 2×1. Allora ogni piastrella copre una casella bianca e una nera e dunque abbiamo tante caselle bianche quante caselle nere. Questo comporta una contraddizione. □

Problemi

Risolvere utilizzando la tecnica della dimostrazione per assurdo i seguenti problemi.

Problema 19.* Dimostrare che se $a, b \in \mathbb{N}$ sono tali che $a + b + ab$ è un multiplo di 6, allora entrambi sono pari.

Problema 20.* Dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale.

Problema 21.** Dimostrare che se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi per il quale esistono tre interi distinti a, b, c tali che $P(a) = P(b) = P(c) = 5$, allora non esiste un numero intero d tale che $P(d) = 4$.

Problema 22.** Siano $X_1, ..., X_n$, con $n > 3$, degli insiemi di due elementi tali che, a due a due, le loro intersezioni abbiano esattamente un elemento. Dimostrare che almeno tre di essi hanno intersezione non vuota.

Problema 23.** [Barsanti, Conti, Franzoni 1994] Dimostrare che non esistono due numeri razionali $a, b \in \mathbb{Q}$ tali che $\sqrt[3]{2} = a + \sqrt{b}$.

Problema 24.** [Barsanti, Conti, Franzoni 1994] Dimostrare che se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti interi tale che $P(0)$ e $P(1)$ sono degli interi dispari, allora $P(x)$ non può avere radici intere.

Problema 25.*** [Barsanti, Conti, De Lellis, Franzoni 2002] Dimostrare che ogni numero naturale $n > 1$ che ha non più di due fattori primi e tale che il numero $\varphi(n) := |\{j \in \{1, ..., n\} | \,\mathsf{MCD}(n, j) = 1\}|$ divide $n - 1$, è un numero primo.