1. Usare bene le fattorizzazioni

Una delle tecniche per far emergere informazioni utili per la risoluzione di molti problemi è quella di scomporre i numeri in fattori primi. Vediamo alcuni esempi.
Se $(a+1)(b+1)(c+1) = 85$, con a, b e c numeri naturali, quanto vale $a+b+c$? Siccome $85 = 5 \cdot 17$, dovrà essere $a+1 = 5$, cioè $a = 4$, $b+1 = 17$ cioè $b = 16$ e $c+1 = 1$ cioè $c = 0$ da cui segue la soluzione $a+b+c = 20$.
Il prodotto di tre numeri consecutivi è 1.953.000. Qual è il più piccolo dei tre numeri? Fattorizziamo il numero: $1.953.000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 31$. Osserviamo che $100^3 = 1.000.000 < 1.953.000$ per cui i numeri cercati devono essere maggiori di 100. In tre numeri consecutivi solo uno può essere divisibile per 5 e questo ci porta a concludere che uno dei tre deve essere $5^3 = 125$. Essendo 126 l'unico numero divisibile per 7 ($126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$) vicino a 125 e dato che i fattori mancanti moltiplicati danno come risultato 124, 1.953.000 è uguale al prodotto $124 \cdot 125 \cdot 126$ e la soluzione è 124.

Il numero di divisori

La richiesta di determinare il numero di divisori di un numero naturale, magari grande, può apparire a prima vista difficile. Invece sono proprio le fattorizzazioni a venirci in soccorso. Il numero di divisori positivi si calcola eseguendo il prodotto degli esponenti della fattorizzazione tutti aumentati di uno.
Per esempio, il numero di divisori di 120 si ottiene così: la fattorizzazione è $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Gli esponenti sono 3, 1 e 1 e allora il numero di divisori è dato da

$(3+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 16$.
Diamo un'idea (che è una traccia di dimostrazione) del perché è così. Un divisore del numero può avere nella sua fattorizzazione il fattore 2 con esponente 3, 2, 1 o 0 (quattro possibilità). Allo stesso modo per i fattori 3 e 5 ci sono due possibilità ciascuno. Il caso in cui ciascuno dei fattori compare zero volte corrisponde al divisore 1, che non va dimenticato. Moltiplicando fra loro tutte queste possibilità si ottiene appunto $4\cdot 2\cdot 2 = 16$.

1.1 Problemi

Problema 1.1. Pinocchio diventa un bambino vero!

Tornati a casa dopo mille avventure, Geppetto e Pinocchio festeggiarono cantando e ballando insieme. Durante la notte, mentre il babbo dormiva, apparve la fata turchina e disse: «Bravo, Pinocchio, ti sei dimostrato in gamba, coraggioso e disinteressato. Risolvi quest'ultimo problema e diventerai un bambino vero: di un intero positivo n si sa che $n! = 2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$. Quanto vale n?». Dopo qualche istante la fatina toccò Pinocchio con la bacchetta magica e svanì...

Problema 1.2. Papà si arrabbia

Senza Gioia al Quartier Generale, la situazione comincia a peggiorare. Con Rabbia e Paura al quadro comandi, anche papà si arrabbia e manda Riley in punizione in camera. Non rimane altro da fare che cercare di finire i compiti. L'ultimo problema rimasto chiede per quanti valori interi di x accade che $5000 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$ è ancora un numero intero. Nessuno dei tre sentimenti sa da che parte cominciare per aiutare Riley. Qual è la soluzione del problema?

Problema 1.3. Nel frattempo...

Gioia e Tristezza si ritrovano circondate da enormi scaffali pieni di sfere di ricordi. Tristezza spiega a Gioia che si trovano nella Memoria a Lungo Termine e che gli scaffali sono costruiti in modo da contenere sempre lo stesso numero di ricordi, e precisamente 10.800, equamente suddivisi in mensole e disposti a formare un grande rettangolo. Gioia osserva quello di fronte a sé e scopre che Tristezza ha proprio ragione, visto che conta 144 sfere per ognuna delle 75 mensole di ciascuno scaffale. Ma ogni scaffale ha un numero diverso di mensole e sfere per mensola, pur rimanendo sempre il totale 10.800. «Ma quanti diversi scaffali possono costruire?» chiede Gioia. «Non lo so. − risponde Tristezza − Ma so, per averlo letto, che non si possono fare scaffali né con una sola mensola né con un solo ricordo per mensola». Sapresti rispondere alla curiosità di Gioia?

Problema 1.4. Il congelamento di Anna

Al termine della fuga, i capelli di Anna cominciano a diventare bianchi e la ragazza avverte un fortissimo freddo. Kristoff la porta dai Troll, immaginando che questi siano capaci di guarirla nuovamente. Questa volta però, Gran Papà spiega: «Magari fosse facile curare Anna, così come è facile calcolare quanti sono i numeri compresi tra 0 e 1000 che sono il prodotto di due numeri (eventualmente anche uguali) entrambi multipli di 3. Ma siccome Anna è stata colpita al cuore, solo un atto di vero amore potrà salvarla dal diventare completamente di ghiaccio». Quanti sarebbero i numeri di cui parlava Gran Papà?

Problema 1.5. A lezione di pozioni

Oggi a scuola si studiano pozioni magiche. Intento a preparare una pozione dentro un'ampolla a forma di parallelepipedo larga 5 cm, profonda 7 cm e alta 11 cm, Settimio si accorge che è troppo piccola e con una magia aumenta ogni dimensione di una stessa lunghezza intera, ottenendo un volume di 2639 cm^3 maggiore rispetto a quello inziale. Di quanto ha aumentato (in centimetri) ciascuna delle lunghezze?

Problema 1.6. Molto, molto lontano (3)

Su uno sperduto pianeta, Luke medita su due numeri interi x e y tali che $x+y=63$ e $xy=752$. Quanto vale x^2+y^2?

Problema 1.7. Grifondoro-Serpeverde

Non è tempo di pensare alla Camera e all'erede. La partita di Quidditch più importante dell'anno sta per cominciare. Serpeverde, grazie alle scope Nimbus 2001, regalo del padre di Malfoy, sta avendo la meglio sulla squadra di Grifondoro. Harry ce la sta mettendo tutta, quando un bolide impazzito lo prende di mira e cerca di colpirlo. Dopo aver schivato il bolide per un paio di volte, Harry vede il boccino d'oro alle spalle di Malfoy e si tuffa all'inseguimento. Per concentrarsi Harry prende un respiro e calcola mentalmente il più piccolo numero naturale il cui prodotto delle cifre è 2000. Urlando la somma delle cifre del numero trovato, si tuffa in avanti e afferra il boccino, facendo vincere la propria squadra. Quale numero ha urlato Harry?

Problema 1.8. Manuale per la produzione di energia

Ora che per produrre energia si usano i problemi di matematica, a Mostropoli si diffondono i manuali di istruzioni, pieni di esercizi divertenti. Mike è un fenomeno in questo campo. Ha inventato questo enigma: se $a \cdot b \cdot c = 2020$ e a, b e c sono numeri interi positivi diversi, quanto può valere al massimo $a+b+c$?

Problema 1.9. Il menhir

Nel villaggio che resiste all'invasore facciamo conosenza con il nostro eroe, Asterix, e col suo amico Obelix. Quest'ultimo porta sulla schiena un menhir a forma di parallelepipedo rettangolo. Questo parallelepipedo è tale che le misure dei suoi spigoli (in decimetri) sono numeri interi maggiori di 1 e due delle tre facce hanno aree 781 dm^2 e 497 dm^2. Quanto misura il volume?

1.2 Soluzioni

Soluzione al problema 1.1. Pinocchio diventa un bambino vero!
Osserviamo che nella fattorizzazione di $n!$ compare il fattore 23 ma non il fattore 29, per cui $23 \leq n \leq 28$. Essendo presente il fattore 13 con esponente due, $26 \leq n \leq 28$. Ora, il fattore 7 è presente con esponente 3, per cui $n \neq 28$. Dal numero dei fattori 3 segue facilmente che $n = 27$.

[Risposta: 27]

Soluzione al problema 1.2. Papà si arrabbia
Scomponendo 5000 in fattori primi otteniamo $2^3 \cdot 5^4$. I valori di x per cui $2^3 \cdot 5^4 \cdot \frac{2^x}{5^x}$ si semplifica, in modo che al denominatore rimanga 1, sono 1, 2, 3 e 4.
Non dobbiamo dimenticare lo 0.
Ci sono anche le potenze negative -1, -2 e -3, con cui al denominatore c'è 2^x, per le quali non va bene l'esponente -4. In totale ci sono 8 valori.

[Risposta: 8]

Soluzione al problema 1.3. Nel frattempo...
Siccome ogni scaffale deve contenere 10.800 sfere e ogni mensola deve avere lo stesso numero di sfere, 10.800 deve essere il prodotto del numero di mensole per il numero di sfere contenute in ogni mensola, per cui è sufficiente calcolare tutti i divisori non banali di 10.800. Infatti, tra tutti i divisori devo escludere 1 (perché non posso avere un'unica mensola con 10.800 ricordi) e 10.800 (perché non ci possono essere 10.800 mensole con una sola sfera).
Siccome $10.800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, il numero dei divisori di 10.800 è dato da

$$(4+1) \cdot (3+1) \cdot (2+1) = 60\,.$$

Togliendo 1 e 10.800, restano 58 possibilità.

[Risposta: 58]

Soluzione al problema 1.4. Il congelamento di Anna
Il quesito equivale a trovare tutti i multipli di 9 minori di 1000, perché nella fattorizzazione di ciascuno dei due fattori deve comparire un 3, quindi nel loro prodotto comparirà 3^2. Siccome 1000 diviso per 9 dà quoziente 111 e resto 1, il risultato è proprio 111.

[Risposta: 111]

Soluzione al problema 1.5. A lezione di pozioni
Prima soluzione. Siccome $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ cm^3, il volume della nuova ampolla è di $2639 + 385 = 3024$ cm^3. Cerchiamo allora la soluzione dell'equazione $(5+x)(7+$

$x)(11+x) = 3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Siccome 5, 7 e 11 sono dispari e almeno uno di loro deve risultare pari, x sarà dispari. Ma allora tutti e tre i fattori saranno pari e uno di loro sarà multiplo di 4. Riorganizzando opportunamente i fattori (o procedendo per tentativi) si scopre che

$$3024 = \left(2^2 \cdot 3\right) \cdot (2 \cdot 7) \cdot \left(2 \cdot 3^2\right) = 12 \cdot 14 \cdot 18 = (5+7)(7+7)(11+7)\,.$$

Il valore cercato è $x = 7$ cm.

Seconda soluzione. Un metodo rozzo ma efficace è quello di andare per tentativi. Una volta appurato che il volume totale è uguale a $5 \cdot 7 \cdot 11 + 2639 = 3024$ si può osservare che, essendo $\sqrt[3]{1000} = 10$ e $\sqrt[3]{3}$ sicuramente maggiore di 1 e minore di 1,5, probabilmente i tre numeri devono essere tra 10 e 20.

Siccome x è un numero intero, possiamo procedere per tentativi a partire da 10 e poi scendere fino a trovare la soluzione $x = 7$.

Resta evidente che se x non fosse stato intero, questo metodo non avrebbe funzionato.

[Risposta: 7]

Soluzione al problema 1.6. Molto, molto lontano (3)

Prima soluzione. Fattorizziamo 752 e otteniamo $47 \cdot 2^4$. L'unica coppia di fattori che dà come sommma 63 è $47 + 16$. Il valore cercato è $x^2 + y^2 = 47^2 + 16^2 = 2645$.

Seconda soluzione. Conoscendo lo sviluppo del quadrato del binomio, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, non è necessario conoscere i due valori. Si può osservare che

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 63^2 - 2 \cdot 752 = 2465\,.$$

[Risposta: 2465]

Soluzione al problema 1.7. Grifondoro-Serpeverde

Siccome $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, almeno tre delle cifre del numero devono essere 5. Invece 2^4 può essere ottenuto, usando solo due cifre, sia da $4 \cdot 4$ che da $8 \cdot 2$. Quest'ultima coppia ci permette di scrivere il numero più piccolo possibile che è 25.558, la cui somma delle cifre è 25.

[Risposta: 25]

Soluzione al problema 1.8. Manuale per la produzione di energia

Scomponiamo 2020 in fattori primi: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Per cercare di massimizzare $a + b + c$ dobbiamo fare sì che uno dei tre fattori sia il valore più grande possibile. Se scegliamo $c = 1$ e $b = 2$ ci resta $a = 1010$ che è il più grande fattore che possiamo ottenere.

Il valore cercato è $a + b + c = 1010 + 2 + 1 = 1013$.

[Risposta: 1013]

Soluzione al problema 1.9. Il menhir

Siccome due facce hanno sicuramente un lato in comune, la cui misura è un numero intero, per determinarla scomponiamo i due dati in fattori primi: $781 = 11 \cdot 71$ e $497 = 7 \cdot 71$.

Non avendo altri fattori comuni diversi da 71, il lato comune tra queste due facce misura 71 dm, e gli altri lati misurano 11 e 7 dm. Il volume richiesto è $71 \cdot 7 \cdot 11 = 5467$ dm^3.

[Risposta: 5467]