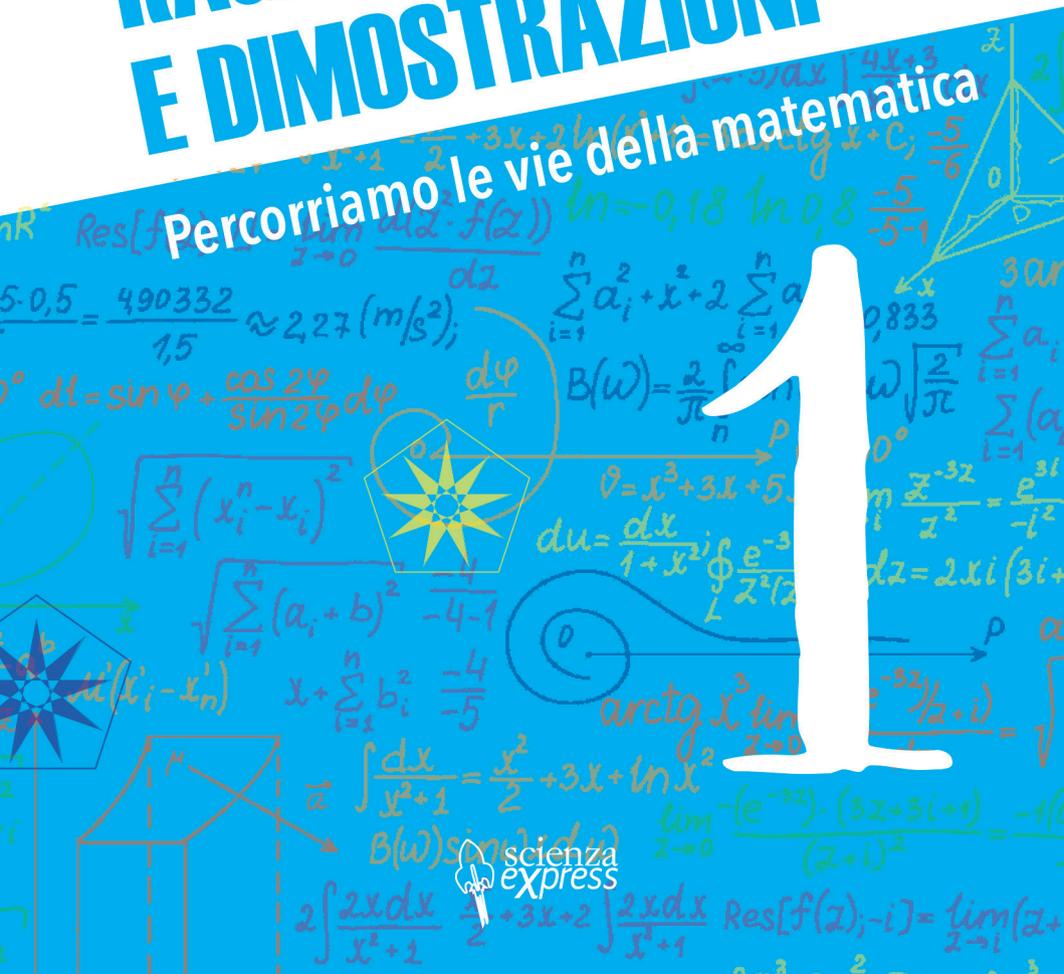


Maria Borzi
Antonino Casto
Filippo Cavallari

PROBLEMI RAGIONAMENTI E DIMOSTRAZIONI

Percorriamo le vie della matematica



IN QUESTA COLLANA

Franco Lunardi, *Giochi, curiosità e problemi 1*

Salvatore G. Cappello, Angelina Fileccia,
Scoperte, problemi e sfide 1

Elisabetta Falchetti, Flaminia Tranchida, *Capire i viventi*

Leonardo Alfonsi, Robert Ghattas, Alessandro Gnucci,
Da qui a Maxwell il passo è breve

Daniela Folcio, *Basta compiti adesso giochiamo*

Scienza under 18 (a cura di), *Attori del sapere*

Progetto O3E, *Raccontare il meteo*

Puoi trovare i nostri libri e i nostri e-book anche su
www.scienzaexpress.it

Maria Borzì, Antonino Casto, Filippo Cavallari

Problemi, ragionamenti e dimostrazioni **1**

Percorriamo le vie della matematica

estratto

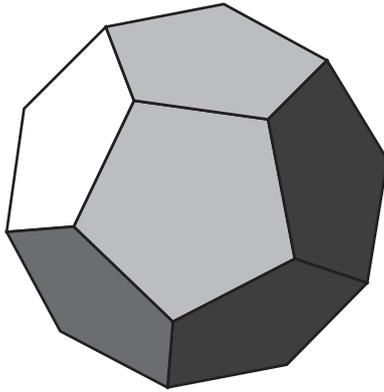
© Scienza Express edizioni, Trieste
Prima edizione in *scuola 2.0* settembre 2020
Maria Borzi, Antonino Casto, Filippo Cavallari
PROBLEMI, RAGIONAMENTI E DIMOSTRAZIONI 1

Copertina di Nicole Vascotto

ISBN 979-12-80068-02-6

PROBLEMI

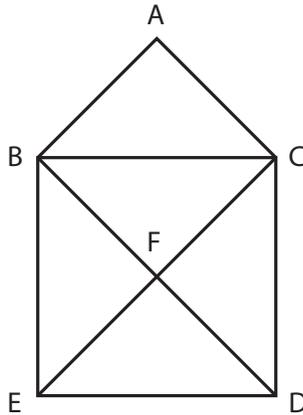
1. UN DADO PARTICOLARE



Il dado di un gioco da tavolo ha la forma di un dodecaedro regolare: ha, cioè, 12 facce su ognuna delle quali è inciso un numero diverso. I numeri sono tutti e soli i divisori di 160.

Qual è la probabilità che, lanciando il dado, esca sulla faccia superiore un divisore di 100?

2. UN CAMMINO EULERIANO



Un classico passatempo richiede di disegnare la “casetta” senza mai staccare la penna dal foglio e senza passare per più di una volta dallo stesso segmento.

In quale dei seguenti modi è possibile farlo?

- A) Solo se iniziamo dal punto A.
- B) Solo se iniziamo dai punti B o C.
- C) Solo se iniziamo dai punti D ed E.
- D) Solo se iniziamo dal punto F.
- E) Solo se iniziamo dai punti A o F.



3. ALADINO E LA MONETA FALSA

Aladino ha trovato un gruzzolo di monete d'oro, ma il Genio della lampada lo avvisa che tra di esse ve ne è una falsa, riconoscibile perché più leggera delle altre. La differenza di peso è però minima, per cui Aladino non riesce a individuare a mani nude la moneta più leggera.

Il Genio allora decide di aiutare Aladino: gli regala una perfetta bilancia a due bracci e afferma che, dividendo in gruppi in modo opportuno le monete, saranno sufficienti tre pesate per essere certi di individuare la moneta falsa.

Qual è il numero massimo di monete che Aladino potrebbe possedere?

4. UN COMPLEANNO "PERFETTO"

Gli abitanti di Elisir festeggiano solamente i compleanni "perfetti", ovvero i compleanni che cadono nello stesso giorno della settimana in cui si è nati. Ad esempio, Maria è nata mercoledì 13 gennaio 1999, quindi festeggerà il suo compleanno solamente quando il 13 gennaio cadrà di mercoledì.

A quale età Maria festeggerà il suo terzo compleanno perfetto?

5. DAL PIZZAIOLO

Il pizzaiolo Salvatore ha preparato due teglie di pizza rettangolari delle stesse dimensioni: una pizza Capricciosa e l'altra Quattro stagioni.

Ha già venduto un quarto della Capricciosa e un terzo della Quattro stagioni.

Quale è il numero minimo di tranci tutti di uguale dimensione che può ancora ottenere dalle due pizze?

- A) 24
- B) 16
- C) 10
- D) 5
- E) 17

SOLUZIONI

1. UN DADO PARTICOLARE

Risposta: 50%

Scomponiamo 160 in fattori primi: $160 = 2^5 \times 5$

Dunque, i divisori di 160 sono dodici e sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80 e 160.

Tra questi, sei numeri sono anche divisori di 100: 1, 2, 4, 5, 10 e 20.

Poiché la probabilità di un evento si ottiene come rapporto dei casi favorevoli fratto tutti i casi possibili, la probabilità che esca un divisore di 100 non è altro che $6/12$, ovvero il 50%.

2. UN CAMMINO EULERIANO

Risposta: C

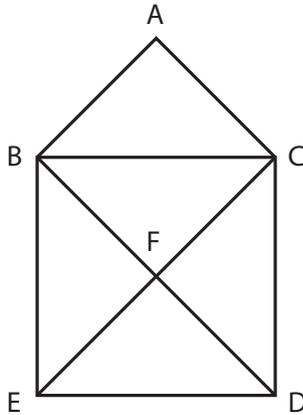
È facile vedere che iniziando dai punti D o E, il disegno può essere realizzato con le regole richieste. Ad esempio, iniziando da E, si può effettuare questo percorso.

E - D - C - B - E - F - C - A - B - F - D

Nel percorso descritto passiamo più volte da alcuni punti, ma questo non viola le regole del gioco proibiscono, infatti, di passare più volte da uno stesso segmento, non da un singolo punto.

Lo stesso percorso, letto da destra a sinistra, permette di disegnare la casetta da D a E.

Partendo dagli altri punti, invece, non è mai possibile percorrere l'intera figura senza passare due volte dallo stesso segmento.



APPROFONDIMENTO

Il quesito enunciato sopra è un classico problema di teoria dei grafi. In matematica avanzata, un grafo è un insieme di punti, detti *vertici*, e archi che collegano due punti, detti *spigoli*. Un grafo per il quale esiste un cammino che percorre tutti gli spigoli esattamente una volta si dice *grafo euleriano*. Condizione necessaria perché un grafo sia euleriano è che esistano al massimo due vertici con un numero dispari di spigoli che convergano su di essi (come nel nostro caso: i vertici D ed E). Inoltre, se il grafo ha esattamente due vertici con tale proprietà, il cammino che rende il grafo euleriano deve iniziare e finire proprio in questi due vertici (e infatti, il cammino proposto nella soluzione, inizia da E e termina in D).

3. ALADINO E LA MONETA FALSA

Risposta: 27

Con 3 pesate riusciamo a individuare la moneta falsa tra 27. Procediamo in questo modo.

Per effettuare la prima pesata, dividiamo le 27 monete in 3 gruppi da 9 e mettiamone 2 sulla bilancia a due piatti. Se la bilancia è in equilibrio, la moneta falsa è nel terzo gruppo. Se non lo è, il gruppo con la moneta falsa sarà quello che pesa di meno.

Effettuiamo la seconda pesata, dividendo le 9 monete del gruppo più leggero in 3 gruppi da 3 monete e replicando la stessa situazione della prima pesata.

Infine, effettuiamo la terza pesata, dividendo le 3 monete rimaste in 3 gruppi da... 1 moneta.

Per stabilire però che 27 è, in effetti, il numero massimo per il quale bastano tre sole pesate, dobbiamo verificare che da 28 monete in su servono almeno 4 pesate per individuare la moneta più leggera.

Facciamo qualche passo indietro: con 4 monete abbiamo bisogno di 2 pesate per essere certi di trovare la moneta falsa (sai dire quali, no?).

Adesso, se abbiamo 10 monete e le dividiamo in tre gruppi, notiamo che ci sarà un gruppo con almeno 4 monete. La prima pesata ci serve per individuare il gruppo che contiene la moneta falsa e se questo è proprio quello da 4, per quanto detto prima avremo bisogno di altre 2 pesate per individuare la moneta falsa (e quindi in tutto 3 pesate).

Ora supponiamo di avere almeno 28 monete: comunque le dividiamo in tre gruppi, ci sarà un gruppo che conterrà almeno 10 monete. Se la prima pesata ci indica che la moneta falsa è proprio nel gruppo da almeno 10, avremo bisogno di altre 3 pesate, o più, per individuare la moneta falsa.

Quindi da 28 monete in su servono almeno 4 pesate.

SFIDA

Se il Genio avesse detto ad Aladino che le pesate necessarie erano 4, quale sarebbe stato, a questo punto, il numero massimo di monete che Aladino poteva possedere?

Il ragionamento ora dovrebbe essere chiaro :-)

4. UN COMPLEANNO "PERFETTO"

Risposta: 22 anni

Nella divisione per 7, il numero 365 ha resto 1. Quindi, un qualsiasi giorno di un determinato anno cadrà nel giorno della settimana successivo a quello in cui cadeva nell'anno precedente: se il 13 gennaio 1998 è martedì, allora il 13 gennaio 1999 sarà mercoledì.

Attenzione però agli anni bisestili, che fanno "slittare" di uno il conteggio.

Ogni volta che incorriamo in un anno bisestile, dovremo avanzare di due giorni della settimana, anziché di uno solo (infatti 366 ha resto 2 nella divisione per 7), tutti i giorni dal 1° marzo dell'anno bisestile fino al 28 febbraio dell'anno successivo.

Il 2020 è un anno bisestile, quindi, ad esempio, il 13 gennaio cade di domenica nel 2019, di lunedì nel 2020 e di mercoledì nel 2021.

Mentre il 13 marzo cade di mercoledì nel 2019 e di venerdì nel 2020.

L'anno 1999 in cui è nata Maria non è un anno bisestile, mentre lo è il 2000, così come lo sono tutti gli anni successivi al 2000 che sono multipli di 4 (2004, 2008, eccetera).

Pertanto Maria festeggerà il suo terzo compleanno perfetto all'età di 22 anni come ci dice la tabella che descrive i giorni della settimana in cui cade il 13 gennaio.

1999	MERCOLEDÌ
2000 BIESTILE	GIOVEDÌ
2001	SABATO
2002	DOMENICA
2003	LUNEDÌ
2004 BIESTILE	MARTEDÌ
2005	GIOVEDÌ
2006	VENERDÌ
2007	SABATO
2008 BIESTILE	DOMENICA
2009	MARTEDÌ
2010	MERCOLEDÌ (COMPLEANNO PERFETTO)
2011	GIOVEDÌ
2012 BIESTILE	VENERDÌ
2013	DOMENICA
2014	LUNEDÌ
2015	MARTEDÌ
2016 BIESTILE	MERCOLEDÌ (COMPLEANNO PERFETTO)
2017	VENERDÌ
2018	SABATO
2019	DOMENICA
2020 BIESTILE	MARTEDÌ
2021	MERCOLEDÌ (COMPLEANNO PERFETTO)

5. DAL PIZZAIOLO

Risposta: 17 tranci di pizza

Al momento in questione, restano ancora da vendere tre quarti della pizza Capricciosa e due terzi della Quattro stagioni.

Pertanto, sommando le quantità di pizza rimasta abbiamo $3/4 + 2/3 = (9+8)/12 = 17/12$.

Poiché la frazione $17/12$ non si può semplificare, il numero minimo di tranci che Salvatore può ancora vendere è 17 e ognuno di essi ha la dimensione di $1/12$ della pizza originaria.