

ESTRATTO

1.6 Giochi matematici

In questa lezione vedremo alcuni classici problemi proposti nei giochi matematici, si tratta di quesiti di carattere ricreativo proposti a studenti di tutte le età.

Questi problemi di tipo logico-ricreativo vengono risolti con metodi piuttosto elementari, come l'esame dei casi e la loro limitazione, spesso sono molto utili approcci euristici come esaminare casi piccoli, fare tabelle e schemi che rappresentano il problema.

Verranno proposti esempi tratti dal testo di Gilles Cohen, Michel Criton e altri "I giochi matematici"⁶.

Esame dei casi dal punto di vista logico

Vediamo alcuni esempi in cui è sufficiente enumerare i casi dal punto di vista logico.

Esempio 1.6.1. (Frase autoreferenziali). Esaminare il seguente riquadro.

In questo riquadro, vi è esattamente un'affermazione vera.
 In questo riquadro, vi è esattamente un'affermazione falsa.
 In questo riquadro, vi sono esattamente due affermazioni vere.
 In questo riquadro, vi sono esattamente due affermazioni false.

Quante affermazioni sono vere?

Soluzione. Vanno esaminate tutte le possibilità logiche:

può essere utile puntualizzare alcune osservazioni preliminari, le prime due affermazioni sono incompatibili (non possono essere entrambe vere), mentre la terza e la quarta sono equivalenti.

Esaminiamo i casi in base al numero di affermazioni false:

è possibile che le affermazioni siano tutte false, questo non determina contraddizioni, quindi una risposta valida è che 0 affermazioni sono vere.

E' possibile che una sola affermazione sia vera:

se assumiamo vera la prima (c'è esattamente un'affermazione vera), necessariamente le altre debbono essere false, questo caso è coerente (non ci sono contraddizioni), quindi abbiamo un'altra soluzione valida.

E' possibile che due affermazioni siano vere:

ad esempio se la terza e la quarta sono vere e le prime due false, non ci sono contraddizioni. Questa è una terza soluzione valida.

⁶Gilles Cohen, Michel Criton e altri, *I giochi matematici*, Pole Italia Biblioteca di XlaTangente, Milano, 2007, traduzione di Angelo Lissoni

I casi con tre affermazioni vere e una falsa, o quattro affermazioni vere portano rapidamente a contraddizioni.

Pertanto complessivamente abbiamo trovato tre soluzioni al problema: 0, 1, 2 affermazioni vere. $\square$

Esempio 1.6.2. (Il problema del lupo, della capra e dei cavoli di Alcuino (VIII secolo)). Un uomo possiede un lupo, una capra e dei cavoli e vuole attraversare un fiume. Dispone di una barca così piccola che può contenere, oltre che la sua persona, solo uno tra lupo, capra e cavoli. Come dovrà procedere, sapendo che il lupo intende divorare la capra e la capra vuole mangiare i cavoli?

Soluzione. Il problema può essere affrontato esaminando i casi logici e rappresentandoli in una tabella, osserviamo che il lupo può stare assieme ai cavoli mentre la capra deve stare sempre sola

Passaggio	Sponda iniziale	Sponda finale
0-1	Lu, Cv	Co, Ca
1-2	Lu, Cv, Co	Ca
2-3	Cv	Ca, Co, Lu
3-4	Cv, Ca, Co	Lu
4-5	Ca	Co, Lu, Cv
5-6	Ca, Co	Lu, Cv
6-7		Co, Ca, Lu, Cv

i passaggi sono sempre forzati eccetto al passaggio 2-3 in cui il contadino può anche scegliere i cavoli, ma la successione di mosse che segue è analoga. La conclusione è che servono 7 passaggi. $\square$

Figure magiche

Le figure magiche sono configurazioni di numeri che rispettano certe proprietà, in genere i numeri che si trovano allineati hanno somma costante.

Esempio 1.6.3. I quadrati magici sono tabelle quadrate $n \times n$ in cui le caselle sono occupate da interi che si susseguono a partire da 1; le righe, le colonne e le due diagonali hanno uguale somma (la costante magica $M(n)$). Compilare almeno un quadrato magico 3×3 .

Soluzione. Studiamo il caso 3×3 : i numeri presenti vanno da 1 a 9, ma non sappiamo come sono distribuiti, però possiamo sommarli tutti, dalla formula per i primi interi abbiamo $S = 1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ un numero triangolare.

Dato che le tre righe devono avere la stessa somma, ciascuna deve avere somma 15, che è la costante magica del quadrato 3×3 .

Per compilare il quadrato è essenziale capire quale numero va inserito nella casella centrale. Notiamo che il numero nella casa centrale è presente in quattro somme differenti a totale costante e ci sono solo tre numeri con questa caratteristica l'1 (129, 138, 147, 156, la somma è 12), il 5 (519, 528, 537, 546, somma 15) e il 9 (918, 927, 936, 945, somma 18). Quindi il 5 è l'unico che può stare nella casa centrale.

In alternativa si potevano inserire nove incognite,

a	b	c
d	e	f
g	h	i

scrivendo le quattro somme che coinvolgono la casa centrale si ottiene $a + b + c + d + e + f + g + h + e + e + e = 4 \cdot 15$ e quindi $e = 5$. Ora è possibile piazzare gli altri numeri facilmente, un esempio è il seguente:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

□

Esempio 1.6.4. Consideriamo i quadrati magici $n \times n$ in cui le caselle sono occupate da interi che si susseguono a partire da 1. Trovare una formula per la costante magica in dipendenza da n .

Soluzione. Osserviamo che un quadrato magico è riempito da $n \cdot n = n^2$ numeri. Non sappiamo come sono distribuiti, però possiamo sommarli tutti, dalla formula per i primi interi abbiamo $S = 1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Questa somma è un numero triangolare. Notiamo che può essere calcolata in un secondo modo: dato che la somma di ogni riga è sempre uguale alla costante magica $M(n)$: varrà $S = nM(n)$. Sostanzialmente abbiamo fatto un conteggio doppio della stessa quantità; ora possiamo uguagliare i due conteggi, otteniamo:

$$nM(n) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \Rightarrow M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

□

Limitare i casi

Come abbiamo visto un metodo basilare è l'enumerazione dei casi, ma spesso il loro numero è estremamente grande. È possibile limitare il loro numero con ragionamenti di carattere matematico, è un aspetto fondamentale che distingue il bravo risolutore.

Esempio 1.6.5. (Il controcrittogramma di Dudeney (XIX secolo)). Considerare la somma:

$$SEND + MORE = MONEY$$

in cui lettere distinte indicano cifre distinte. Trovare il risultato.

Soluzione. I controcrittogrammi sono operazioni aritmetiche in cui le cifre sono sostituite da lettere (lettere distinte indicano cifre distinte). Perché il problema abbia senso le regole di trasformazione devono essere biunivoche, inoltre nessun numero può iniziare con 0. L'elemento fondamentale di questo genere di problemi è limitare i casi possibili. Osserviamo che la somma di due numeri di quattro cifre è sempre un numero di minore di 20000, quindi M è forzatamente 1.

La somma è $SEND + 10RE = 1ONEY$, notiamo che abbiamo la somma di un numero minore di 10000 e di uno minore di 2000 quindi il risultato sarà minore di 12000, se ne può dedurre che O vale 0.

Ora MORE è minore di 1098 e MONEY è maggiore di 10234, quindi SEND è maggiore di 9000, ed S vale 9.

Abbiamo ora $9END + 10RE = 10NEY$. Esaminiamo la somma in colonna

0	9	E	N	D
0	1	0	R	E
1	0	N	E	Y

dato che N ed E non possono essere uguali, ci deve essere un riporto e l'unico possibile è un 1, quindi $N = E + 1$.

Nella seconda colonna sono possibili due casi $E + 1 + R = 10 + E$ che implica $R = 9$ non accettabile, oppure un altro caso con riporto $E + 1 + 1 + R = E + 10$ che implica $R = 8$.

Essendo Y almeno 2 avremo E almeno 5 perché si abbia $D + E > 12$ (D è massimo 7).

Concludiamo esaminando i casi possibili $E = 6$ ed $E = 5$, il primo caso non porta soluzioni accettabili, il secondo individua $N = 6$, $D = 7$ e $Y = 2$, perciò la soluzione è $9567 + 1085 = 10652$. $\square$

Esempio 1.6.6. (*Découpage*). Campionati Internazionali di Giochi Matematici 2011. Dividere la figura in tre parti perfettamente sovrapponibili (per sovrapporre le parti della figura, è possibile che qualcuna di loro vada ruotata).

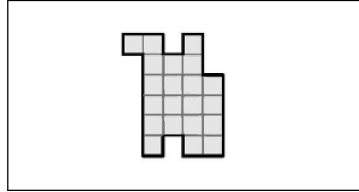


Figura 1.5: *Découpage*

Soluzione. Non esiste un metodo meccanico per risolvere questo problema. Possiamo solo osservare che i casi possibili sono in numero finito, quindi con un approccio di “forza bruta”, magari con un programma informatico, la soluzione si troverà.

Senza supporti la bravura del risolutore sarà trovare il modo di limitare il più possibile i casi da esaminare.

Prima di iniziare calcoliamo l’area: sono 21 quadretti. Perciò un pezzo sarà formato da 7 quadretti, già questa informazione permette di diminuire in modo significativo i casi da esaminare.

Ora cerchiamo di capire la forma: partiamo dalle estremità perché ci sono dei blocchi che sono forzatamente uniti, dato che dobbiamo considerare esclusivamente blocchi da sette celle.

Notiamo che nella parte alta sono presenti due porzioni forzate che hanno in prossimità una cella. Ci saranno quattro possibilità

1. la cella appartiene a entrambe le regioni;
2. la cella appartiene solo alla regione di sinistra;
3. la cella appartiene solo alla regione di destra;
4. la cella non appartiene a nessuna delle due regioni.

Il primo caso vincola molto il problema perché si forma un blocco da sei celle, perciò va esaminato subito dato che potrebbe portare rapidamente alla soluzione.

Questo blocco va completato aggiungendo un’ultima cella per arrivare a sette. Abbiamo tre possibilità, come si può notare in figura. Aggiungendo la cella più a sinistra, tra le tre possibili, si giunge alla soluzione. Questo tipo di problema viene

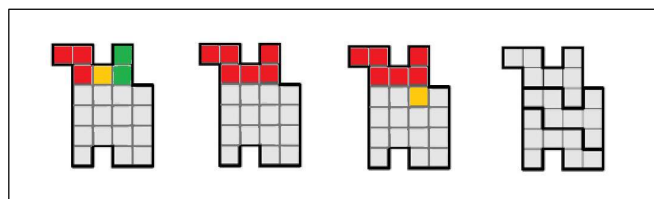


Figura 1.6: Soluzione del problema

proposto spesso, proprio perché non c'è un modo automatico di risolverlo, si tratta di impostare una lunga ricerca, il risolutore brillante saprà limitare bene i casi e arriverà prima alla soluzione. Bisogna ammettere che in alcuni passaggi l'ordine in cui si esaminano i casi è determinante, perciò credo che una certa casualità nel tempo di risoluzione sia ineliminabile. $\square$

Esame dei casi piccoli, tabelle e grafi

Un modo per affrontare problemi complessi è studiare gli stessi problemi in situazioni più semplici e acquisire informazioni su questi per poi passare al problema generale con le idee più chiare. Un altro metodo è fare schemi detti grafi che modellizzano il problema e sviluppare ragionamenti su questi schemi.

Esempio 1.6.7. (Torre di Hanoi). È un famoso gioco composto da tre paletti e n dischi di grandezza variabile, che possono essere infilati nei paletti. Il gioco inizia con tutti i dischi incolonnati sul primo paletto, in ordine crescente dal basso verso l'alto. Lo scopo del gioco è portare tutti i dischi sull'ultimo paletto, potendo spostare solo un disco alla volta e potendo mettere un disco solo su un altro disco più grande, mai su uno più piccolo. Consideriamo una torre a 10 dischi. Qual è il numero minimo di mosse da compiere per spostare la torre sul terzo paletto?

Soluzione. In genere all'inizio di un problema relativo ad un gioco di mosse si cerca di capire come si possa realizzare il successo. La domanda interessante in questo problema è “quale sarà il numero minimo di mosse per giungere alla vittoria?” Conviene fare una tabella che riporti in una colonna una grandezza che caratterizza il problema, in questo caso il numero di dischi n , e nell'altra l'aspetto da analizzare, in questo caso il minimo di mosse a_n . Ora procediamo risolvendo i casi più semplici per capire come funziona

1. $n = 1$, è sufficiente trasferire il disco sul terzo paletto e il gioco è risolto, pertanto $a_1 = 1$;
2. $n = 2$, essendo due i dischi le mosse saranno almeno due, ma dato che prima bisogna muovere il disco più piccolo, non è possibile realizzare l'obiettivo con due mosse, saranno almeno tre. Se mettiamo il disco più piccolo nel secondo paletto e trasferiamo l'altro disco sul terzo paletto, potremo concludere mettendo il disco più piccolo sul terzo paletto, avendo compiuto tre mosse, $a_2 = 3$;
3. $n = 3$, dobbiamo iniziare decidendo di mettere il disco più piccolo sul secondo o sul terzo paletto. Trasferiamolo sul terzo, forzatamente il disco intermedio andrà sul secondo paletto e il disco grande non potrà essere mosso e quindi il disco più piccolo andrà posto sul paletto intermedio sopra il disco intermedio, formando forzatamente una torre di Hanoi con due dischi; a questo punto si posiziona il disco più grande sul terzo paletto e si deve trasferire la torre con due dischi dal secondo al terzo paletto, sappiamo che ci metteremo altre 3 mosse per un totale di $3 + 1 + 3 = 7$ mosse forzate perchè sono mosse minime del caso precedente.
L'unica alternativa da esaminare è, alla prima mossa, mettere il disco più piccolo sul secondo paletto ma questo porta a formare una torre a due dischi sul terzo paletto e questo ci allontana da una soluzione con mosse minime perché per concludere impiegheremo più di sette mosse. In conclusione $a_3 = 7$;
4. $n = 4$, la strategia utilizzata nel caso precedente può essere ripetuta: formiamo la torre con tre dischi sul secondo paletto (in sette mosse), quindi spostiamo sul terzo il disco più grande, e poi con altre sette mosse spostiamo la torre con tre dischi per concludere, in totale avremo fatto 15 mosse. Come prima l'unica alternativa comporta la formazione di una torre a tre dischi sull'ultimo paletto e in questo caso per concludere sono necessarie più di 15 mosse. In conclusione $a_4 = 15$;

Possiamo riassumere le nostre osservazioni sui casi piccoli in questa tabella

Dischi n	1	2	3	4
Mosse a_n	1	3	7	15

È abbastanza naturale fare la congettura che il numero minimo di mosse sia $N = 2^n - 1$, quindi per $n = 10$ saranno 1023. Proviamo a dimostrarla per induzione:

1. passo base, nel caso $n = 1$ è valida;

2. passo induttivo: supponiamo che la relazione sia valida nel caso con n dischi, cerchiamo di mostrare che vale anche nel caso con $n + 1$ dischi.

Incominciamo a spostare gli n dischi superiori dalla prima colonnina alla seconda e, per questo, abbiamo supposto che siano necessari $2^n - 1$ movimenti. Spostiamo poi il disco più grande dalla prima colonnina alla terza, con un movimento. Infine, spostiamo gli n dischi dalla seconda colonnina alla terza, sul disco più grande, e questo richiede altre $2^n - 1$ mosse. In totale, i movimenti che abbiamo compiuto, per spostare gli $n + 1$ dischi, sono: $2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.

Pertanto per induzione è vera per ogni n . □

Esempio 1.6.8. (Pesate di palline). Abbiamo una bilancia a due piatti e 12 palline una delle quali pesa più delle altre: quante pesate occorrono al minimo per trovare la pallina più pesante?

Soluzione. Dobbiamo determinare il numero minimo di pesate necessario per individuare la pallina più pesante. Significa che dobbiamo pensare al caso più sfavorevole possibile. Invece che cercare di capirlo direttamente ragioniamo al contrario, cioè analizziamo le informazioni che possiamo ottenere da un certo numero di pesate conteggiando tra quante palline possiamo discriminare:

1. se procediamo con una pesata, potremo individuare la pallina più pesante quando la cerchiamo tra due palline; ma in realtà una pesata basta anche per discriminare tra tre palline perché se ci fosse equilibrio tra i piatti potremo dedurre che la pallina più pesante è quella esclusa dalla pesata; quindi con 1 pesata possiamo gestire fino a tre palline, ma non quattro perché nel caso più sfavorevole avremmo una pesata con due palline identiche e quindi quella pesante sarà all'interno delle due escluse, perciò non è possibile con 1 pesata discriminare tra quattro palline;
2. se procediamo con due pesate, potremo sfruttare quanto visto nel caso precedente. formiamo gruppi di tre palline, pesiamo due gruppi da tre palline e lasciamo un gruppo escluso. Con la prima pesata potremo individuare in quale gruppo si trova la pallina più pesante. Dato che il gruppo incriminato è formato da tre palline, potremo individuarla con un'ulteriore pesata, come nel caso precedente; questo modo di gestire le palline basta fino a nove palline. Con dieci palline si ripresenta il problema che, nel caso più sfavorevole, avremo pesato sempre palline identiche e la pallina più pesante alla fine sarà esclusa insieme ad un'altra pallina e non viene perciò individuata;

3. se consideriamo tre pesate, potremo individuare la pallina più pesante all'interno di tre gruppi di nove palline (totale 27 palline), in quanto alla pesata successiva dovremo discriminare tra nove palline e sappiamo che si può fare con due pesate.

Riassumiamo le informazioni con una tabella dei casi piccoli.

Palline N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pesate n	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3

Abbiamo trovato la risposta al nostro quesito, sono necessarie 3 pesate. Sulla base della nostra analisi possiamo dire che in generale fissato un numero n di pesate possiamo discriminare fino a 3^n palline. $\square$

Esempio 1.6.9. (Giochi finiti a due giocatori con informazione completa e somma zero). Due pirati Jim e John si sfidano a bere 100 ml di birra dallo stesso boccale. Bevono a turni alterni e al proprio turno possono scegliere se bere 1, 2, $\dots$, o 10 ml. Vince chi finisce per primo.

Soluzione. In questo tipo di problemi se un giocatore vince l'altro perde. Entrambi hanno tutte le informazioni sul contesto, in tali casi Zermelo nel 1913 ha dimostrato che esiste sempre una strategia di gioco ottimale. Nel caso in esame può essere utile analizzare la situazione dalla conclusione del gioco e studiare come mettere l'avversario in posizione di sconfitta certa.

La situazione certamente perdente è trovarsi di turno con 11 ml da bere, in quanto qualsiasi scelta farà il giocatore che ha la mossa, al turno successivo il suo avversario vincerà. A questo punto dobbiamo capire come portare il nostro avversario ad avere la scelta con 11 ml. Dobbiamo capire quale sarà la posizione di sconfitta certa precedente: sarà 22 ml, infatti qualsiasi mossa fa il giocatore, il suo avversario lo potrà mandare ad avere 11 ml e perdere. A ritroso i casi con 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 ml sono di sconfitta certa a gioco corretto. Abbiamo la risposta, è il primo giocatore ad avere la strategia vincente perché da 100 ml basta bere il minimo possibile, cioè 1 ml, per portare l'avversario in posizione 99 ml che è di sconfitta certa. Qualsiasi scelta lui faccia il secondo giocatore i il primo compenserà la scelta con $11 - i$ ml, e giungendo turno dopo turno alla vittoria. $\square$

Problema conclusivo

Un famoso problema che viene risolto con degli schemi detti grafi.

Esempio 1.6.10. La città russa di Königsberg (appartenente alla Prussia Orientale nel XVIII secolo e oggi chiamata Kaliningrad) è attraversata dal fiume Pregel e sono presenti due isole sul fiume. Il collegamento tra la città e le isole si basava su un sistema di 7 ponti. Ci si domandava se fosse possibile percorrere la passeggiata completa attraversando ogni ponte una e una sola volta.

Soluzione. Il problema venne risolto da Eulero, matematizzando il problema dimostrò che la passeggiata non era possibile.

Vediamo perché: la situazione può essere schematizzata con un grafo, uno schema con dei punti detti “nodi” e delle linee che collegano i nodi e che sono chiamate “archi”.

Nel grafo che rappresenta questo problema rappresentiamo le posizioni rilevanti (le due sponde e le due isole) con dei nodi e i collegamenti importanti (i 7 ponti) con degli archi.

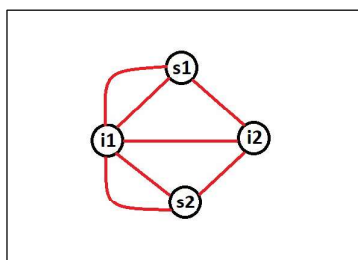


Figura 1.7: Grafo delle posizioni

come si può notare ad ogni nodo si può associare il numero di collegamenti che lo caratterizzano (si dice grado): $s1$, $s2$ e $i2$ hanno grado 3, mentre $i1$ ha grado 5. Il teorema di Eulero sui gradi afferma che “il grafo è percorribile se i nodi hanno tutti grado pari, o in alternativa se esattamente due hanno grado dispari”. Il motivo è che sono ammessi grafi in cui si parte da un nodo e si chiude il percorso in un altro nodo, quindi in questo caso due sono dispari, tutti gli altri nodi devono essere pari perché bisogna sia entrarvi che uscirne. Nel grafo della passeggiata ci sono quattro nodi di grado dispari, quindi è impossibile trovare un percorso che attraversi tutti i ponti una e una sola volta. $\square$