1. La formula di Eulero

1.1 I solidi platonici

Consideriamo un solido come quelli in figura 1.1. Si tratta dei cosiddetti **solidi platonici** (nell'ordine tetraedro, ottaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro). I solidi platonici sono dei *poliedri*, cioè dei solidi delimitati da un numero finito di poligoni piani che prendono il nome di *facce* del poliedro. I lati di tali poligoni sono gli *spigoli* del poliedro e i vertici di tali poligoni sono i *vertici* del poliedro. Inoltre i solidi platonici sono *poliedri regolari*, nel senso che le loro facce sono tutti poligoni regolari uguali fra loro e in ogni vertice del poliedro concorre lo stesso numero di facce.

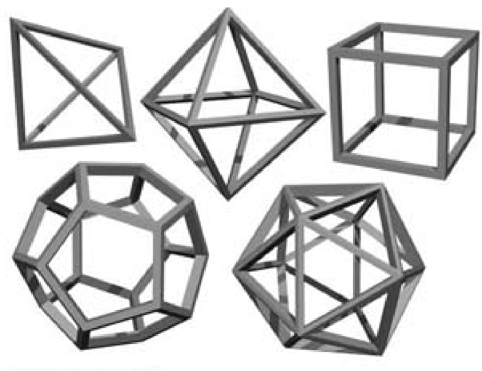

Figura 1.1: solidi platonici

	vertici	spigoli	facce
tetraedro	4	6	4
ottaedro	6	12	8
cubo	8	12	6
dodecaedro	20	30	12
icosaedro	12	30	20

Tabella 1.1: solidi platonici: vertici, spigoli e facce

Contiamo il numero di vertici, spigoli e facce di ciascun solido e riempiamo la tabella 1.1 (per i primi solidi il conto è abbastanza semplice, man mano che si va avanti diventa più complicato. . .).

Analizzando attentamente la tabella 1.1 si vede che, per ogni solido platonico, la somma del numero delle facce (F) e del numero dei vertici (V), supera di 2 il numero degli spigoli (S), cioè vale la seguente uguaglianza:

$$F + V = S + 2 \qquad \text{o equivalentemente} \qquad V - S + F = 2.$$

A volte, per ricordare questa relazione, si usa la frase *Fatti Vedere Sabato alle 2* dove le iniziali delle parole *Fatti*, *Vedere*, *Sabato*, ricordano i numeri di facce, vertici e spigoli.

Questa uguaglianza, trovata nel 1640 da Descartes e riscoperta e usata da Eulero nel 1752, prende il nome di **formula di Eulero** e vale per ogni poliedro *semplice*. Un poliedro si dice *semplice* se non ha "buchi", ovvero se è possibile deformarlo con continuità (senza tagli né incollamenti) fino ad adattarlo ad una superficie sferica. Le trasformazioni continue sono tipiche della topologia che studia le proprietà delle figure geometriche che restano invariante proprio per trasformazioni continue.

Dal punto di vista topologico, i solidi platonici sono tutti equivalenti tra loro e possono essere tutti riprodotti, in forma topologicamente equivalente, su una sfera. Ciò accade per tutti i poliedri semplici. Il poliedro in figura 1.2 invece, che ha un buco, non è topologicamente equivalente ad una sfera ma ad un toro[1].

Il fatto che la formula di Eulero valga per tutti i poliedri semplici è legato al fatto che il numero $V - S + F$ è una caratteristica topologica del poliedro, cioè non varia al variare delle proprietà metriche del poliedro (lunghezza dei lati, area delle superfici, ampiezza degli angoli) e neppure al variare del numero delle facce ma dipende solo dalle caratteristiche topologiche del poliedro, cioè se è deformabile

[1] Un toro è una figura geometrica avente la forma di una ciambella.

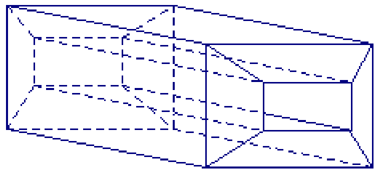

Figura 1.2: Poliedro non semplice

con continuità in una sfera (superficie con 0 buchi), in un toro (superficie con 1 buco) o, in generale, in una superficie con n buchi.

Possiamo pensare un poliedro semplice come un grafo i cui nodi siano i vertici e i cui lati siano gli spigoli.

Il fatto che il poliedro sia semplice ci permette di deformarlo con continuità e di ottenere un grafo planare e connesso. Per farlo immaginiamo di *aprire* una faccia del poliedro e *schiacciarlo* sul piano. Nella figura 1.3 vediamo come *schiacciare* sul piano un ottaedro in modo da ottenere un grafo planare e connesso: immaginiamo di guardare all'"interno" dell'ottaedro dalla faccia ABF, vedremmo il triangolo CDE connesso a tutti gli altri vertici.

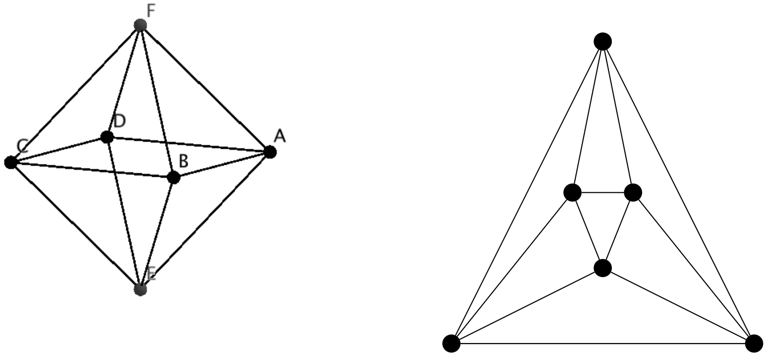

Figura 1.3: Un ottaedro schiacciato sul piano

1.2 Formula di Eulero per i grafi e due dimostrazioni

Se definiamo le *facce di un grafo piano* come le regioni in cui il grafo, quando è rappresentato sul piano, divide il piano stesso, possiamo riformulare la proprietà espressa dalla formula di Eulero come segue:

Teorema 1.2.1 (Eulero)**.** *In un grafo planare connesso vale la seguente relazione tra numero di nodi (V), numero di lati (S) e numero di facce (F):*

$$V - S + F = 2$$

Prima dimostrazione (Courant e Robbins). L'idea di base è quella di partire dal grafo planare connesso e modificarlo in maniera da lasciare invariata la quantità:

$$V - S + F$$

Consideriamo le regioni chiuse che il nostro grafo forma sul piano. Se c'è una regione chiusa delimitata da più di tre lati del grafo, allora colleghiamo due vertici non adiacenti che appartengono a tali lati in modo da suddividere la regione in due sottoregioni, e continuiamo a fare ciò fino a che tutte le regioni chiuse siano limitate da tre lati. Si noti che in queste operazioni il numero di facce aumenta di una e il numero di lati aumenta di uno quindi la quantità $V - S + F$ rimane invariata.
Ora, per ognuna delle regioni chiuse, eliminiamo uno dei lati che la delimitano fino a che non ci saranno più regioni chiuse. Notiamo che in queste operazioni il numero di facce diminuisce di uno e anche il numero di lati diminuisce di uno, perciò la quantità $V - S + F$ resta ancora invariata.
Alla fine del procedimento abbiamo ottenuto un grafo aciclico e connesso (un albero!) in cui, come sappiamo (si veda ciò che vale a tal proposito per gli alberi), il numero dei nodi supera di uno il numero dei lati ($V = S + 1$). Inoltre la regione in cui il piano è diviso dal grafo è una sola perché non ci sono cicli (abbiamo eliminato tutte le regioni chiuse) quindi $F = 1$. Pertanto si ha

$$V - S + F = S + 1 - S + 1 = 2$$

□

La dimostrazione precedente è molto simile a quella riportata nel testo Courant-Robbins. Possiamo riformularla in maniera leggeremente diversa usando il principio di induzione di cui abbiamo parlato nel capitolo ad esso dedicato:

Seconda dimostrazione (induzione). Sia G un grafo planare e connesso. Dimostriamo l'enunciato per induzione sul numero S degli archi.

(**base**) Sia $S = 0$, allora G ha solo un vertice (altrimenti sarebbe vuoto) e una faccia che è costituita da tutto il piano. Quindi la relazione è soddisfatta: $V - S + F = 1 - 0 + 1 = 2$.

(**passo**) Il grafo G ha un numero di archi $S \geq 1$. Abbiamo due possibilità:

1. In G c'è un vertice di grado 1. Eliminiamo il vertice in questione e l'unico arco connesso a tale vertice e otteniamo un grafo G' che verifica l'ipotesi induttiva con numero di vertici, archi e facce rispettivamente uguali $V' = V - 1, S' = S - 1, F' = F$. Per l'ipotesi induttiva si ha $V' - S' + F' = 2$ da cui $V - 1 - S + 1 + F = 2$ ovvero $V - S + F = 2$;
2. Non ci sono vertici di grado 1, quindi ogni arco delimita una regione *chiusa* (cioè non quella esterna); in tal caso, eliminando l'arco, abbiamo eliminato anche una faccia e pertanto si ha $V' = V$, $S' = S - 1$ e $F' = F - 1$ e dall'ipotesi induttiva $V' - S' + F' = 2$ otteniamo $V - S + 1 + F - 1 = 2$, quindi $V - S + F = 2$.

$\square$

1.3 Una terza dimostrazione con il grafo duale

Vogliamo dare una terza dimostrazione di questo risultato che si basa su altre interessanti idee legate ai grafi; per far ciò abbiamo bisogno del concetto di *grafo duale* di un grafo planare.

Definizione 1.3.1 (Grafo duale)**.** Dato un grafo planare G, si dice grafo duale di G e si indica con G^*, un grafo tale che:

- G^* ha un nodo per ogni faccia del grafo G;
- tra due nodi distinti di G^* c'è un arco per ogni arco di G che forma il confine tra le due facce corrispondenti;
- per ogni nodo di G^* c'è un cappio per ogni arco di G che confina da entrambi le parti con la faccia corriponente.

Nella figura 1.4 abbiamo rappresentato un grafo (con i nodi pieni e gli archi come linee continue) e il suo grafo duale (con i nodi vuoti e gli archi come linee tratteggiate). Osserviamo che in generale il numero di archi di un grafo duale G^* è uguale al numero di archi di G.
Dalla definizione precedente segue che il grafo duale di un grafo dato non è semplice ma può avere più di un arco fra due nodi anche se il grafo di partenza G è semplice.
La relazione di dualità è involutoria nel senso specificato nel prossimo esercizio.

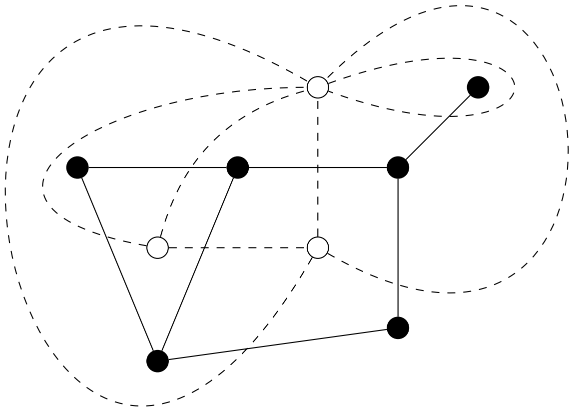

Figura 1.4: Grafo Duale

Esempio 1.3.1. Sia G un grafo planare connesso e G^* il suo duale. Dimostrare che il duale di G^* è G, ovvero che $(G^*)^* = G$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che ogni ciclo del grafo duale G^* contiene almeno un vertice dii G. Infatti ogni arco di un ciclo di G^* corrisponde a un arco di G e gli archi di G che "passano" per la faccia di G^* interna al ciclo devono incidere in almeno un vertice di tale faccia.
Inoltre, se G è connesso, ogni faccia di G^* contiene esattamente un vertice di G, come si vede applicando la formula di Eulero sia a G:

$$V(G) - S(G) + F(G) = 2 \tag{1.1}$$

sia a G^*:

$$V(G^*) - S(G^*) + F(G^*) = 2 \tag{1.2}$$

Dato che, per la definizione di G^*, si ha $V(G^*) = F(G)$ e $S(G^*) = S(G)$, confrontando le formule 1.1 e 1.2 si ottiene $V(G) = F(G^*)$, quindi si può invertire la costruzione del grafo duale ottenendo $G = G^{**}$.
Ora che abbiamo introdotto il concetto di grafo duale, affrontiamo la terza dimostrazione della formula di Eulero.

Terza dimostrazione (Proofs from the Book). Partiamo sempre dal grafo planare connesso G, sia E l'insieme dei suoi lati. Sappiamo che esiste un albero che lo ricopre (si veda il capitolo sugli alberi). Sia T l'insieme dei lati di tale albero, naturalmente si ha $E \subseteq T$. Consideriamo il grafo duale G^* e sia E^* l'insieme dei suoi archi. Ora consideriamo il sottografo di G^* che ha gli stessi nodi di G^* e tale che il suo insieme di archi T^* sia così definito: tra due nodi c'è un arco per ogni arco in $E \setminus T$. Osserviamo che T^* è connesso altrimenti vorrebbe dire che una faccia di G ha come lati solo archi di T e quindi T avrebbe un ciclo (il che è impossibile perché T è un albero[2]). Inoltre T^* non ha cicli, altrimenti un suo ciclo sconnetterebbe i vertici di T. Pertanto anche T^* è un albero e possiamo applicare, sia a T che a T^*, la relazione tra numero di vertici V e numero di archi S di un albero: $V = S + 1$ (si veda il capitolo sugli alberi). Per quanto riguarda T, il numero dei suoi vertici è V (pari al numero dei vertici del grafo G) e il numero degli archi è $|T|$ quindi si ha $V = |T| + 1$. Per quanto riguarda T^*, il numero dei suoi vertici è F perchè ha un vertice per ogni faccia di G e il numero di archi è $|T^*|$, quindi si ha $F = |T^*| + 1$. Si noti che

$$|T| + |T^*| = S$$

quindi sommando le due uguaglianze precedenti otteniamo

$$V + F = |T| + 1 + |T^*| + 1 = S + 2$$

che corrisponde alla formula di Eulero. □

Ora che abbiamo dato ben tre dimostrazioni della formula di Eulero, proviamo ad usarla per risolvere un semplice esercizio.

Esempio 1.3.2. Dimostrare, usando la formula di Eulero, che in un albero il numero dei vertici supera di 1 il numero degli archi.

[2] Un albero è, per definizione, un grafo aciclico e connesso

Soluzione. Un albero non ha cicli quindi ha una sola faccia. Pertanto per un albero la formula di Eulero divente:

$$V - S + 1 = 2$$

da cui si ottiene subito

$$V = S + 1$$

1.4 Applicazioni della formula di Eulero

1.4.1 Esistono solo 5 solidi platonici

La formula di Eulero ha molte applicazioni. Una celebre applicazione è la dimostrazione che i solidi platonici sono solo 5.

Teorema 1.4.1. *Esistono solo 5 solidi platonici.*

Dimostrazione. Consideriamo un solido platonico che abbia V vertici, S spigoli e F facce. Supponiamo che in ogni vertice si incontrino r spigoli e che ogni faccia del solido abbia n lati. Possiamo contare il numero di spigoli del solido in due modi[3]:

1. Considerando che in ogni vertice concorrono r spigoli e che ogni spigolo è in comune tra due vertici:

$$r \cdot V = 2 \cdot S \quad \text{da cui} \quad V = \frac{2 \cdot S}{r}$$

2. Considerando che ogni faccia ha n lati e che ogni lato è in comune tra due facce, si ha:

$$n \cdot F = 2 \cdot S \quad \text{da cui} \quad F = \frac{2 \cdot S}{n}$$

sostituiamo le due espressioni ricavate per V e per F nella formula di Eulero e otteniamo:

$$\frac{2S}{r} + \frac{2S}{n} = S + 2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$$

Si noti che $r \geq 3$ perché in ogni vertice si incontrano almeno 3 spigoli e $n \geq 3$ perché ogni faccia ha almeno 3 lati.
Inoltre dalla relazione precedente si deduce che non è possibile avere $r > 3$ e $n > 3$ altrimenti si avrebbe

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$$

[3]L'idea di contare una caratteristica numerica di un oggetto in due modi diversi per stabilire un'uguaglianza viene detta *tecnica del doppio conteggio*; per una spiegazione dettagliata si veda il capitolo introduttivo sui grafi.

in contraddizione con la relazione precedente.
Pertanto si deve avere $r = 3$ o $n = 3$.

- Se $r = 3$ allora la relazione precedente diventa:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}$$

quindi gli unici valori ammissibili per n sono $n = 3, 4, 5$, da cui si ha rispettivamente $S = 6, 12, 30$, $V = 4, 8, 20$ e $F = 4, 6, 12$ che corrispondono a tetraedro, cubo e dodecaedro.

- Se $n = 3$ allora la relazione precedente diventa:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{S}$$

quindi gli unici valori ammissibili per r sono $r = 3, 4, 5$ da cui si ha rispettivamente $S = 6, 12, 30$, $V = 4, 6, 12$ e $F = 4, 8, 20$ che corrispondono a tetraedro, ottaedro e icosaedro.

$\square$

Esempio 1.4.1. Dimostrare che, dati 5 punti sul piano, è impossibile collegare con delle linee ogni punto a tutti gli altri in maniera che le linee non si intersechino.

Soluzione. Vogliamo dimostrare che, dati 5 punti sul piano, se vogliamo conettere ogni punto agli altri 4, allora gli archi che useremo per rappresentare queste connessioni devono per forza intersecarsi. Lo dimostriamo per assurdo: supponiamo di aver tracciato i cinque punti con tutte le connessioni, si tratta di un grafo planare semplice connesso e completo su 5 vertici. Il numero di archi del nostro grafo è:

$$S = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

infatti ognuno dei 5 vertici è connesso agli altri 4 e ogni arco connette due vertici. Applichiamo quindi la formula di Eulero con $V = 5$ e $S = 10$ e otteniamo:

$$5 - 10 + F = 2 \qquad \text{da cui} \qquad F = 7$$

Ora, dato che ogni faccia del grafo deve essere delimitata da almeno 3 archi e che ogni arco è in comune tra due facce, abbiamo che:

$$3 \cdot F \leq S \cdot 2$$

quindi il numero di archi deve soddisfare la diseguaglianza:

$$S \geq \frac{3F}{2} \qquad \text{ovvero} \qquad S \geq \frac{21}{2}$$

ma ciò è in contraddizione con il valore 10 trovato precedentemente.

Esempio 1.4.2. Dimostrare che in un grafo semplice, planare e connesso con n vertici ($n > 2$) c'è un vertice che ha grado minore o uguale a 5.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che ogni vertice abbia grado maggiore o uguale a 6. Allora, dato che ogni arco del grafo collega due vertici, si ha che il numero degli archi S soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$2S \geq 6n \qquad \text{da cui} \qquad S \geq 3n$$

Inoltre, come abbiamo visto nella soluzione dell'esempio 1.4.1:

$$2S \geq 3F$$

quindi, sommando le due disuguaglianze, si ottiene:

$$3S \geq 3n + 3F \qquad \text{ovvero} \qquad n + F \leq S$$

in contraddizione con la formula di Eulero, secondo la quale $n + F = S + 2$.

1.4.2 Teorema di Sylvester-Gallai

Ora vediamo, come applicazione della formula di Eulero, una delle possibili soluzioni a un problema proposto da J. J. Sylvester nel 1893. Non è chiaro se Sylvester avesse la soluzione del problema, quel che è certo è che Tibor Gallai, quarant'anni dopo, riuscì a dimostrare la congettura che, per questo motivo, ha preso il nome di Teorema di Sylvester e Gallai. Ne proponiamo una dimostrazione che fa uso della Formula di Eulero e, per la precisione, del risultato che abbiamo stabilito risolvendo l'esempio 1.4.2.

Teorema 1.4.2 (Sylvester-Gallai)**.** *Dati n punti sul piano ($n \geq 3$) non tutti sulla stessa retta, esiste sempre una retta che contiene esattamente due fra questi punti.*

Dimostrazione. (Mediante la formula di Eulero). Consideriamo il piano in questione inserito nello spazio tridimensionale. Al di sotto del piano. consideriamo una sfera. Dato un punto del piano tracciamo la retta passante per tale punto e per il centro della sfera. Consideriamo il piano perpendicolare a tale retta che interseca la sfera in una circonferenza massima (vedi figura 1.5).

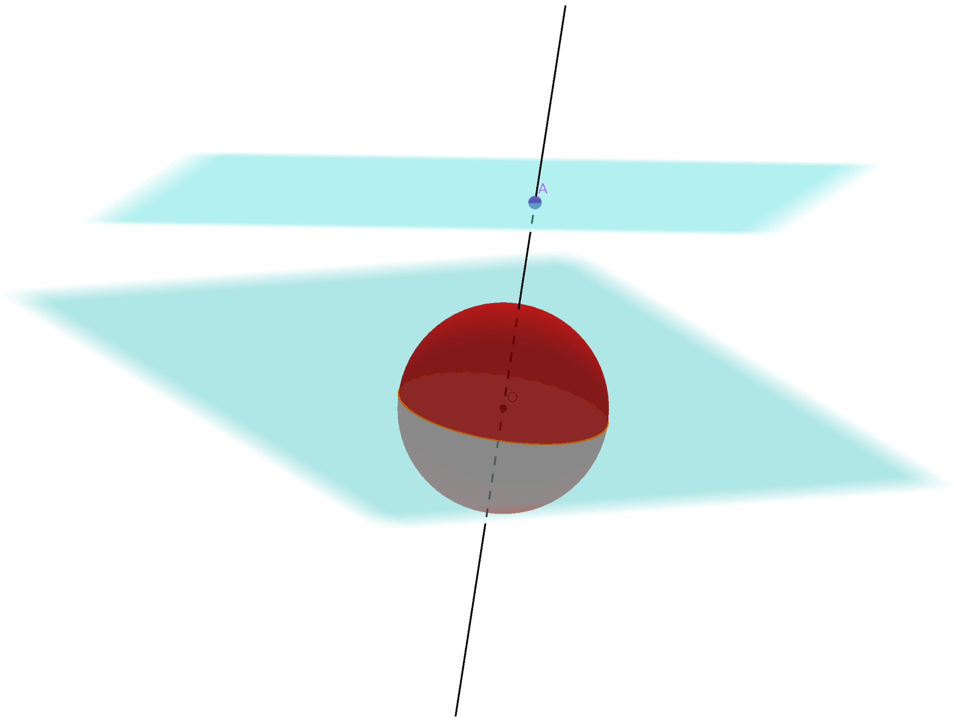

Figura 1.5: Corrispondenza punto-circonferenza massima

In questo modo facciamo corrispondere ad ogni punto del piano una circonferenza massima sulla sfera. Quindi il teorema risulta dimostrato una volta che si provi che *date n circonferenze massime sulla sfera, con $n \geq 3$, che non passano tutte per la stessa coppia di punti, esiste sempre sulla sfera un punto che appartiene ad esattamente due di queste circonferenze massime.*

Per dimostrare questo enunciato consideriamo il grafo formato dalle n circonferenze massime sulla sfera (si veda la figura 1.6) i cui vertici sono i punti di intersezione delle circonferenze e gli archi sono gli archi di circonferenze massime che uniscono due punti di intersezione. Come osservato per i solidi platonici, questo è un grafo planare e connesso.

Notiamo che ogni vertice ha grado pari perchè divide in due ogni circonferenza. Inoltre il grado deve essere almeno 4 perchè per esserci un vertice devono incontrarsi almeno due circonferenze. Quindi, per quanto abbiamo visto nell'esempio 1.4.2, c'è un vertice di grado esattamente 4, ovvero un punto in cui si intersecano esattamente 2 circonferenze. □

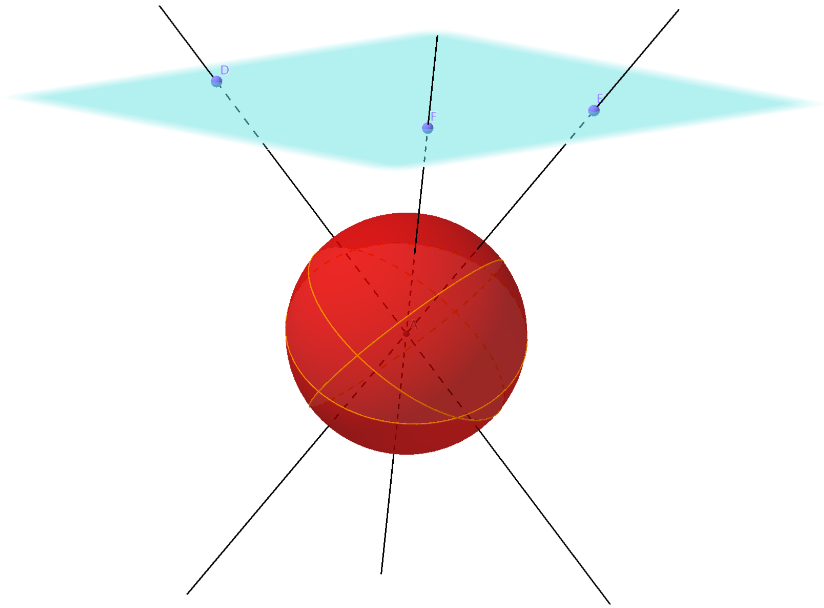

Figura 1.6: Grafo sulla sfera

1.4.3 Teorema di Pick

L'ultima applicazione della formula di Eulero che proponiamo è la dimostrazione di un altro teorema sorprendente, del quale ne forniamo prima l'enunciato per poi introdurre gli strumenti necessari alla dimostrazione.

Teorema 1.4.3 (Pick)**.** *Sia Q un poligono nel piano i cui vertici hanno come coordinate dei numeri interi, allora la sua area è data da:*

$$A(Q) = n_{int} + \frac{1}{2}n_{bd} - 1$$

dove n_{int} e n_{bd} indicano il numero di punti della griglia a coordinate intere che si trovano rispettivamente internamente al poligono e sul bordo del poligono.

Per esempio nel poligono Q in figura 1.7 per calcolare l'area contiamo il numero di punti: $n_{int} = 11$, $n_{bd} = 10$ e calcoliamo l'area:

$$A(Q) = 11 + \frac{1}{2}10 - 1 = 15.$$

Per dimostrare il Teorema di Pick definiamo innanzitutto cosa si intende per *poligono elementare*

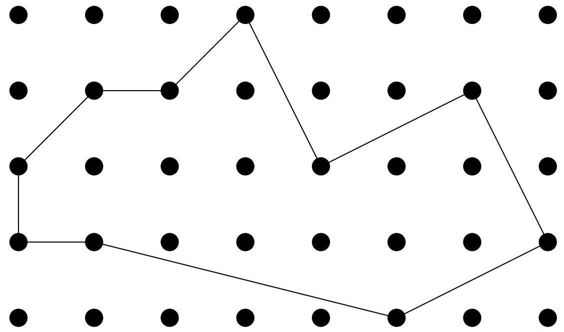

Figura 1.7: Teorema di Pick

Definizione 1.4.4. Un poligono si dice elementare se i suoi vertici appartengono alla griglia a coordinate intere ma non cointiene altri punti della griglia né al suo interno né sul bordo.

Enunciamo quindi un lemma che riguarda i triangoli elementari.

Lemma 1.4.5. Ogni triangolo elementare ha area $\frac{1}{2}$.

Omettiamo la dimostrazione di questo lemma per non appesantire troppo la trattazione. Per i dettagli si veda il già citato testo *Proofs from the Book*.

Dimostrazione. (del Teorema di Pick). L'idea della dimostrazione è dividere il poligono in tanti triangoli elementari come in figura 1.8.

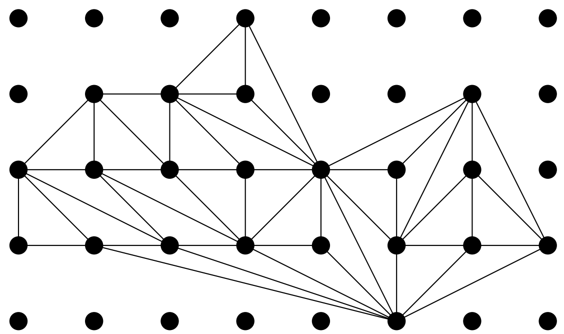

Figura 1.8: Triangolazione

Si può dimostrare che tale triangolazione è sempre possibile e noi lo faremo per esercizio (si veda il problema **??**). Una volta fatta la triangolazione possiamo pensare al nostro poligono come ad un grafo planare connesso che divide il piano in un F regioni: una regione esterna al poligono e $F-1$ triangoli elementari; quindi (grazie al lemma precedente) l'area del poligono è data da:

$$A(Q) = \frac{1}{2}(F - 1)$$

Ora, per esplicitare il valore di F, contiamo gli archi a partire dal numero di triangoli: ogni triangolo è delimitato da 3 archi, sommando il numero di archi per ogni triangolo, contiamo due volte gli archi interni al poligono e una sola volta gli archi che formano il bordo del poligono, abbiamo perciò:

$$3 \cdot (F - 1) = 2 \cdot S_{int} + S_{bd}$$

dove S_{int} sono gli archi interni al poligono e S_{bd} gli archi che formano il bordo del poligono. Ciò equivale a scrivere

$$3 \cdot (F - 1) = 2 \cdot S - S_{bd}$$

dove S è il numero totale di archi. A questo punto notiamo che $S_{bd} = n_{bd}$ e applichiamo la formula di Eulero che possiamo scrivere come $S = n_{int} + n_{bd} + F - 2$ e otteniamo:

$$3 \cdot (F - 1) = 2(n_{int} + n_{bd} + F - 2) - n_{bd}$$

da cui si ha:

$$F = 2n_{int} + n_{bd} - 1$$

sostituendo nell'espressione che abbiamo scritto per l'area del poligono, si ottiene l'enunciato del teorema:

$$A(Q) = \frac{1}{2}(2n_{int} + n_{bd} - 2) = n_{int} + \frac{n_{bd}}{2} - 1$$

□