Salvatore Damantino

# Algebra

## Polinomi, disuguaglianze, equazioni funzionali: teoria e tecniche di problem solving

con Paolo Bordignon, Alberto Cagnetta, Alessandro Pecile

scienza express

# 6. Disuguaglianze

Nella risoluzione di problemi matematici a volte è necessario dimostrare che una certa quantità è maggiore o minore di un'altra, ovvero una disuguaglianza. Le tecniche di dimostrazione sono svariate, vanno dalle applicazioni di disuguaglianze di base o tra le medie, a quelle più avanzate che si basano su disuguaglianze note come quella di Cauchy-Schwarz, di Jensen o di Minkowski. Scopo di questo capitolo è presentare alcune di queste tecniche, accompagnandole con esempi esplicativi.

## 6.1 Disuguaglianze e tecniche di base

Tra tutte le tecniche che è possibile applicare per dimostrare disuguaglianze, ce ne sono alcune che si basano su fatti elementari a cui a volte è utile ricondursi, come i seguenti.

1. Se $x$ è un qualsiasi numero reale allora $x^2 \geq 0$ e l'uguaglianza vale se e solo se $x = 0$.
2. Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sono numeri reali qualsiasi allora $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 \geq 0$ e l'uguaglianza vale se e solo se $x_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
3. $x \geq y$ equivale a $x - y \geq 0$.
4. Se $y > 0$, allora $x \geq y$ equivale a $\frac{x}{y} \geq 1$.
5. Se $x \geq y$ e $y \geq z$ allora $x \geq z$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (*proprietà transitiva*).

6. Se $x \geq y$ e $a \geq b$, allora $x + a \geq y + b$, per ogni $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

7. Se $x \geq y$ e $a \geq b$, allora $xa \geq yb$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$ o $a, b \in \mathbb{R}^+$.

**Esempio 6.1.1.** Dimostrare che per ogni numero reale positivo $x$ vale la relazione

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

**Soluzione.** Riscriviamo la disuguaglianza da dimostrare nel modo seguente.

$$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0.$$

Poiché $x > 0$, essa equivale a $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, ossia $(x-1)^2 \geq 0$, che è sempre verificata perché si tratta di un quadrato.
Osserviamo, infine, che quanto sopra ricavato permette anche di concludere che l'uguaglianza vale se e solo se $x = 1$. $\square$

**Esempio 6.1.2.**[1] Siano $a, b, c, d$ numeri reali tali che $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$. Dimostrare che

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 32.$$

**Soluzione.** Osserviamo che $a^4 \leq a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$ e quindi $-2 \leq a \leq 2$. Da ciò segue che $a^4(a-2) \leq 0$ ossia $a^5 \leq 2a^4$.
In maniera simile si dimostra che $b^5 \leq 2b^4$, $c^5 \leq 2c^4$ e $d^5 \leq 2d^4$.
Di conseguenza si ottiene

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + 2d^4 = 32.$$

$\square$

**Esempio 6.1.3.** Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz.$$

**Soluzione.** Moltiplicando per 2 ambo i membri della disuguaglianza da dimostrare ne otteniamo una equivalente:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz.$$

Quest'ultima risulta vera in quanto può essere riscritta come somma di tre quadrati

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

e quindi anche la disuguaglianza della tesi è vera. $\square$

[1] Esempio tratto da [7].

## 6.2 Disuguaglianze tra medie

Introduciamo, ora, il concetto di *medie* tra numeri reali positivi e analizziamo le relazioni che tra esse intercorrono, iniziando dal caso di due numeri reali positivi.

**Definizione 6.2.1.** Siano $a$ e $b$ due numeri reali positivi. Definiamo **media aritmetica** di $a$ e $b$ la quantità

$$AM = \frac{a+b}{2},$$

**media geometrica** di $a$ e $b$ la quantità

$$GM = \sqrt{ab},$$

**media quadratica** di $a$ e $b$ la quantità

$$QM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

e **media armonica** di $a$ e $b$ la quantità

$$HM = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

**Esempio 6.2.1.** Se $a = 2$ e $b = 8$, risulta $AM = \frac{2+8}{2} = 5$, $GM = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$, $QM = \sqrt{\frac{2^2+8^2}{2}} = \sqrt{34}$ e $HM = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{2+8} = \frac{16}{5}$.

Tra le medie di due numeri reali positivi sussistono delle particolari relazioni che di seguito presentiamo.

**Proposizione 6.2.1** (Disuguaglianza tra le medie)**.** *Siano $a$ e $b$ due numeri reali positivi. Allora si ha*

$$\min\{a,b\} \le HM \le GM \le AM \le QM \le \max\{a,b\}$$

*e le uguaglianze sussistono se e solo se $a = b$.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo innanzitutto che $QM \geq AM$.
A tale scopo partiamo dalla relazione $(a-b)^2 \geq 0$. Essa equivale ad $a^2+b^2 \geq 2ab$ ossia $2a^2+2b^2 \geq a^2+b^2+2ab$ che diventa $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$. Dividendo ambo i membri per 4 si ottiene la relazione equivalente $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ed estraendo la radice quadrata

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

L'uguaglianza vale se e solo se $a-b=0$, ossia se e solo se $a = b$.

Proviamo ora che $AM \geq GM$.
Si ha

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Anche in questo caso l'uguaglianza vale se e solo se $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, ossia se e solo se $a=b$.
Proviamo che $GM \geq HM$.
Si ha

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

e moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{ab}$ si ottiene

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Come in precedenza, l'uguaglianza vale se e solo se $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, ossia se e solo se $a=b$.
Infine, è chiaro che $\min\{a,b\} \leq HM$ e $QM \leq \max\{a,b\}$: infatti, supposto, senza perdita di generalità, $a \leq b$, si ha

$$\min\{a,b\} = a = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

e

$$\max\{a,b\} = b = \sqrt{\frac{b^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

□

**Esempio 6.2.2.** La somma di due numeri reali positivi è 26. Qual è il valore massimo che può assumere il loro prodotto?

**Soluzione.** Siano $a$ e $b$ i due numeri positivi tali che $a+b=26$. Applichiamo la disuguaglianza tra le medie $AM \geq GM$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 13$$

e quindi $ab \leq 169$. Il valore massimo del prodotto di $a$ e $b$ è dunque 169 e viene assunto se e solo se $a=b=13$. □

**Esempio 6.2.3.** Il perimetro di un triangolo rettangolo vale 16. Qual è il minimo valore possibile della lunghezza dell'ipotenusa?

**Soluzione.** Siano $a$ e $b$ le misure dei cateti del triangolo. Allora si ha

$$16 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Per la disuguaglianza tra medie $QM \geq AM$ si ha

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Di conseguenza

$$16 = a + b + \sqrt{a^2+b^2} \geq a + b + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

ossia

$$a + b \leq 16(2 - \sqrt{2})$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $a = b = 8\left(2 - \sqrt{2}\right)$. In tal caso $a+b$ assume il valore massimo $16\left(2-\sqrt{2}\right)$ e, quindi, l'ipotenusa il valore minimo $16 - 16\left(2-\sqrt{2}\right) = 16\left(\sqrt{2}-1\right)$. □

**Esempio 6.2.4.** Siano $a, b$ e $c$ numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

**Soluzione.** Applicando la disuguaglianza $AM \geq GM$ otteniamo

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, \qquad b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}, \qquad c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Moltiplicando membro a membro ricaviamo

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} = 8.$$

L'uguaglianza si ha se e solo se $a = \frac{1}{b}$, $b = \frac{1}{c}$ e $c = \frac{1}{a}$ ossia, come facilmente si ricava, se e solo se $a = b = c = 1$. □

### Caso generale

Generalizziamo a $n \geq 1$ numeri i concetti di medie e le disuguaglianze tra le medie visti nel caso di due numeri interi positivi.

**Definizione 6.2.2.** Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ numeri reali positivi. I numeri

$$AM = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \qquad QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}, \qquad HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

si dicono rispettivamente **media aritmetica**, **media quadratica**, **media geometrica** e **media armonica** di $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Per esse vale il seguente teorema.

**Teorema 6.2.2** (Disuguaglianza tra le medie)**.** *Siano* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *numeri reali positivi. Allora si ha*

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq HM \leq GM \leq AM \leq QM \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

*e le uguaglianze sussistono se e solo se* $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$*.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo, inizialmente, che $AM \geq GM$, ossia

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}. \tag{6.1}$$

Poniamo

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}}, \qquad \text{per } i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Ogni $x_i$ è un numero positivo e risulta $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1$. Osserviamo, ora, che la disuguaglianza (6.1) è equivalente a

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}} \geq n$$

ossia a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq n, \qquad \text{con } x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1, \tag{6.3}$$

e l'uguaglianza valida se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$.
Dimostriamo la relazione (6.3) per induzione[2] su $n$.
Per $n = 1$, la disuguaglianza (6.3) è verificata perché si riduce all'uguaglianza $x_1 = 1$.
Se $n = 2$ allora $x_1 x_2 = 1$ e dato che $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$ si ottiene $x_1 + x_2 \geq 2$. Dunque la (6.3) è vera e l'uguaglianza vale se e solo se $x_1 = x_2 = 1$.
Supponiamo la (6.3) vera per $n$, ossia che per $n$ arbitrari numeri positivi $x_1$, $x_2$, $x_3$,…, $x_n$ tali che $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1$, risulta $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq n$, con l'uguaglianza valida se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1$, e dimostriamola per $n + 1$ numeri positivi.
Siano, dunque, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ arbitrari numeri positivi verificanti la condizione $x_1 x_2 x_3 \cdots x_{n+1} = 1$.

[2] Per il Principio di induzione si veda *Teoria dei numeri*, cap. 1, collana U Math.

Se $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1$, la disuguaglianza (6.3) è banalmente vera.
Supponiamo, dunque, che tra gli $x_i$ ce ne sia almeno uno minore di 1 e, di conseguenza, almeno uno maggiore di 1. Senza perdità di generalità possiamo supporre $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$.
Allora la successione $x_1x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}$ è costituita da $n$ numeri positivi tali che $(x_1x_2)x_3x_4 \cdots x_{n+1} = 1$ e quindi, per ipotesi induttiva, risulta

$$x_1x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+1} \geq n$$

e l'uguaglianza è valida se e solo se $x_1x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = x_{n+1} = 1$.
Ora si ha

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} + x_1x_2 - x_1x_2 + 1 - 1 =$$
$$x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq n + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq n + 1$$

e l'uguaglianza è valida se e solo se $x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = 1$ e $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$, ossia se e solo se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = 1$.
Per il Principio di induzione concludiamo che la (6.3) è vera per ogni $n$.
Infine, per la (6.2) si ha

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}} = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}} = \cdots = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}},$$

ossia

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n.$$

Abbiamo così dimostrato la relazione (6.1).
Dimostriamo, ora, che $GM \geq HM$, ossia

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Per la disuguaglianza $AM \geq GM$ appena dimostrata, si ha che

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_3}\cdots\frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}}$$

da cui segue

$$\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

e chiaramente l'uguaglianza è valida se e solo se $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_3} = \cdots = \frac{1}{a_n}$, ossia se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.
Dimostriamo che $QM \geq AM$, ossia

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}.$$

Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz[3] alle successioni $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$

[3] Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si veda il paragrafo 6.3 del presente testo.

e $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, la seconda costituita da $n$ termini uguali a 1. Si ha, quindi,

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2$$

ossia

$$n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2$$

che, dividendo ambo i membri per $n^2$, equivale a

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$$

ovvero, estraendo la radice quadrata,

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

e l'uguaglianza è valida se e solo se $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \cdots = \frac{a_n}{1}$ ossia se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.
Infine, supponendo senza perdita di generalità che $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1$ e $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n$, risulta

$$\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_1}} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = HM$$

e

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n = \sqrt{\frac{a_n^2 + a_n^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = QM,$$

con l'uguaglianza valida in entrambi i casi se e solo se $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

**Esempio 6.2.5.** Siano $a, b, c$ numeri reali positivi. Determinare il massimo valore di $abc$ sapendo che $3a + 5b + 10c = 9$.

**Soluzione.** Applicando la disuguaglianza $AM \geq GM$ si ottiene

$$\sqrt[3]{3a \cdot 5b \cdot 10c} \leq \frac{3a + 5b + 10c}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

da cui si ricava $3a \cdot 5b \cdot 10c \leq 27$ e quindi

$$abc \leq \frac{27}{150} = \frac{9}{50}.$$

Il valore massimo di $abc$ è $\frac{9}{50}$ e si ottiene se e solo se $3a = 5b = 10c$. Sapendo che $3a + 5b + 10c = 9$ ciò si realizza se e solo se $a = 1$, $b = \frac{3}{5}$ e $c = \frac{3}{10}$. $\square$

**Esempio 6.2.6.** (*Disuguaglianza di Nesbitt*) Siano $a, b, c$ numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

e l'uguaglianza è valida se e solo se $a = b = c$.

**Soluzione.** Trasformiamo il primo membro della disuguaglianza da dimostrare nel modo seguente.

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3 = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3 =$$
$$\frac{1}{2}\left[(a+b)+(a+c)+(b+c)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3.$$

Ponendo $a+b = x$, $a+c = y$ e $b+c = z$, l'ultima espressione diventa

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3.$$

Ora applichiamo la disuguaglianza $AM \geq HM$ ai tre numeri $x, y, z$ e otteniamo

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \quad \Leftrightarrow \quad (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Di conseguenza otteniamo

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3 \geq \frac{1}{2}\cdot 9-3 = \frac{3}{2}$$

e l'uguaglianza è valida se e solo se $x = y = z$ ossia, come facilmente si ottiene, se e solo se $a = b = c$. □

## 6.3 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Una disuguaglianza utile nella dimostrazione di altre disuguaglianze più articolate è la seguente.

**Teorema 6.3.1** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Siano* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *e* $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$ *numeri reali. Allora si ha*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

*ossia*

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

*L'uguaglianza è valida se e solo se le due successioni* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *e* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *sono proporzionali, ovvero* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

*Dimostrazione.* Consideriamo il trinomio di secondo grado

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Tale trinomio assume valori non negativi per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi il suo discriminante $\Delta$ deve essere non positivo. Imponendo tale condizione si ottiene

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^2 \leq 0$$

ovvero

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

che è la tesi.

L'uguaglianza è valida, ossia $\Delta = 0$, se e solo se $a_i x - b_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, ovvero se e solo se il trinomio è identicamente nullo[4] ossia se e solo se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. □

**Esempio 6.3.1.** Dimostrare che se $a, b, c$ sono numeri reali positivi si ha

$$abc(a + b + c) \leq (a^3 b + b^3 c + c^3 a).$$

**Soluzione.** Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle terne $\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{b}}$ e $\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$. Otteniamo

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c + a + b)$$

da cui

$$(a + b + c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(a + b + c)$$

cioè

$$(a + b + c) \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right).$$

Calcolando il denominatore comune e moltiplicando ambo i membri per $abc$ si ottiene, infine,

$$abc(a + b + c) \leq (a^3 b + b^3 c + c^3 a).$$

□

[4] Se per qualche $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ fosse $a_i x - b_i \neq 0$, allora $(a_i x - b_i)^2 > 0$ e il trinomio sarebbe sempre positivo, in quanto somma di quadrati di cui (almeno) uno positivo, e quindi si avrebbe $\Delta < 0$.

**Esempio 6.3.2.** (Gara di matematica a squadre Università di Roma Tor Vergata, 2015) Trovare qual è il minimo valore che può assumere la somma di 90 numeri reali positivi $x_1, x_2, \ldots, x_{90}$ sapendo che

$$\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \cdots + \frac{90^2}{x_{90}} = 4225.$$

**Soluzione.** Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle successioni $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_{90}})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{2}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{90}{\sqrt{x_{90}}}\right)$ e otteniamo

$$\left((\sqrt{x_1})^2 + (\sqrt{x_2})^2 + \cdots + (\sqrt{x_{90}})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{x_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{90}{\sqrt{x_{90}}}\right)^2\right) \geq \left(\sqrt{x_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \sqrt{x_{90}}\cdot\frac{90}{\sqrt{x_{90}}}\right)^2$$

ossia

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{90})\left(\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \cdots + \frac{90^2}{x_{90}}\right) \geq (1 + 2 + 3 + \cdots + 90)^2.$$

Sapendo che $\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \cdots + \frac{90^2}{x_{90}} = 4225$ e $1+2+3+\cdots+90 = \frac{90\cdot 91}{2}$, ricaviamo

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{90}) \cdot 4225 \geq \frac{90^2 \cdot 91^2}{2^2}$$

da cui si ottiene

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{90} \geq \frac{90^2 \cdot 91^2}{2^2 \cdot 65^2} = 63^2 = 3969.$$

Il minimo valore di $x_1 + x_2 + \cdots + x_{90}$ è, quindi, 3969 e si ottiene se e solo se le successioni $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_{90}})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{2}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{90}{\sqrt{x_{90}}}\right)$ sono proporzionali ossia se e solo se $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \cdots = \frac{x_{90}}{90}$ e ciò accade, come facilmente si verifica, se e solo se $x_1 = \frac{63}{65}$. □

## 6.4 Disuguaglianza di riarrangiamento

Consideriamo il seguente problema: quattro scatole contengono banconote rispettivamente da 10 €, 20 €, 50 € e 100 €. Da una scatola è possibile prelevare 4 banconote, da un'altra scatola 5 banconote, da una delle rimanenti 6 banconote e dall'ultima 7 banconote. Qual è la scelta che rende massimo l'importo ottenibile? E quella che lo rende minimo?

Naturalmente la risposta non richiede grandi doti di risolutore di problemi. La scelta che rende massimo l'importo è quella che prevede il prelievo del maggior

numero possibile di banconote da 100 €, quindi il massimo possibile di banconote da 50 € e così via, per un importo massimo di $100 \cdot 7 + 50 \cdot 6 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 1140$ €. Invece, la scelta che rende minimo l'importo è quella che prevede il prelievo del minor numero possibile di banconote da 100 €, quindi il minimo possibile di banconote da 50 € e così via, per un importo minimo di $100 \cdot 4 + 50 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 7 = 840$ €. Scelte diverse da quelle appena presentate[5] comportano importi intermedi tra il massimo e il minimo.
Il teorema seguente si basa proprio su un ragionamento legato all'esempio appena mostrato.

**Teorema 6.4.1** (Disuguaglianza di riarrangiamento). *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1$, $b_2$, $\ldots$, $b_n$ due successioni di numeri reali positivi. La somma $S = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ è massima se le due successioni $a_1, a_2, \ldots a_n$ e $b_1, b_2, \ldots b_n$ sono ordinate allo stesso modo (entrambe crescenti o entrambe decrescenti). $S$ è minima se le due successioni sono ordinate in maniera opposta (una crescente e l'altra decrescente)*[6].

*Dimostrazione.* Confrontiamo due coppie di termini, una per successione.
Sia $a_r > a_s$ e sia $c_1, c_2, \ldots, c_n$ una qualsiasi permutazione[7] di $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Consideriamo le somme

$$S = a_1 c_1 + \cdots + a_r c_r + \cdots + a_s c_s + \cdots + a_n c_n$$

$$S' = a_1 c_1 + \cdots + a_r c_s + \cdots + a_s c_r + \cdots + a_n c_n$$

Allora

$$S' - S = a_r c_s + a_s c_r - a_r c_r - a_s c_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r).$$

Di conseguenza, se $c_r < c_s$ allora $S' > S$; se $c_r > c_s$ allora $S' < S$.
Estendendo il ragionamento alle intere successioni si ottiene la tesi. □

In altri termini, la disuguaglianza di riarrangiamento afferma che se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ allora la somma massima si ottiene moltiplicando il primo termine della prima successione per il primo termine della seconda successione, il secondo termine della prima successione per il secondo termine della seconda successione, il terzo termine della prima per il terzo termine della seconda ecc., mentre la somma minima si ottiene moltiplicando il primo termine della prima successione per l'ultimo termine della seconda successione , il secondo termine della prima per il penultimo della seconda e così via.

[5] Che si basano sull'applicazione del cosiddetto *algoritmo goloso*, ossia un algoritmo che consente di trovare la soluzione ottimale del problema seguendo una strategia euristica in cui, a ogni passo, si opta per la soluzione ottimale relativa a quel passo, senza tener conto di quelli successivi.
[6] Crescenza e decrescenza sono intese indifferentemente in senso stretto o largo.
[7] O *riarrangiamento*, da cui la denominazione della disuguaglianza.

**Corollario 6.4.2.** *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali positivi e $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ un qualunque riordinamento di $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Allora*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

**Esempio 6.4.1.** Siano $a, b, c$ numeri reali positivi. Dimostrare che

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

**Soluzione.** Osserviamo che la disuguaglianza è simmetrica in $a, b, c$ e quindi possiamo supporre che $a \leq b \leq c$, senza perdita di generalità, da cui $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. Osserviamo inoltre che la disuguaglianza equivale alla seguente

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a} \leq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}.$$

Quest'ultima è vera per il corollario 6.4.2 alla disuguaglianza di riarrangiamento applicata alla successione $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. □

Dalla disuguaglianza di riarrangiamento si può ricavare la cosiddetta *disuguaglianza di Chebyshev.*

**Teorema 6.4.3** (Disuguaglianza di Chebyshev)**.** *Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ successioni di numeri reali positivi. Allora*

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

*oppure*

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

*a seconda che le due successioni siano monotone dello stesso tipo o di tipo opposto.*

*Dimostrazione.* Nell'ipotesi in cui le due successioni $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ siano ordinate allo stesso modo, consideriamo le seguenti disuguaglianze, conseguenza della disuguaglianza di riarrangiamento:

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
&\vdots \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$$

da cui, dividendo ambo i membri per $n^2$, si ottiene:

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

Se le due successioni sono ordinate in senso contrario, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

□

**Esempio 6.4.2.** Siano $a, b$ due numeri reali positivi. Dimostrare che

$$2(a^8 + b^8) \geq (a^3 + b^3)(a^5 + b^5).$$

**Soluzione.** Dato che la disuguaglianza è simmetrica, supponiamo, senza perdita di generalità, che $a \leq b$. Allora $a^3 \leq b^3$ e $a^5 \leq b^5$, pertanto le successioni $a^3, b^3$ e $a^5, b^5$ sono ordinate in maniera analoga.
Per la disuguaglianza di Chebyshev si ha

$$\frac{a^3 \cdot a^5 + b^3 \cdot b^5}{2} \geq \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5}{2}$$

ossia

$$2(a^8 + b^8) \geq (a^3 + b^3)(a^5 + b^5).$$

□

## 6.5 Convessità e disuguaglianza di Jensen

In questo paragrafo presentiamo una disuguaglianza, nota come *disuguaglianza di Jensen*, riguardante funzioni convesse. Questi particolari tipi di funzioni hanno diverse applicazione in analisi matematica che esulano dagli obiettivi del presente testo e pertanto di alcuni risultati ometteremo la dimostrazione.

**Definizione 6.5.1.** Sia $I$ un sottoinsieme convesso[8] di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che $f$ è *convessa* in $I$ se per ogni $x, y \in I$ e ogni $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

[8] Un sottoinsieme $I$ di $\mathbb{R}$ si dice *convesso* se per ogni $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $x_1$ e $x_2$ è interamente contenuto in $I$. I sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$ sono quindi i singoli punti, gli intervalli limitati, gli intervalli non limitati inferiormente o superiormente e l'intera retta reale $(-\infty, +\infty)$.