3.

IN RIGA! (O IN RETTA?)

> A straight line may be the shortest distance between two points, but it is by no means the most interesting.
>
> Jon Pertwee as *The Third Doctor* in *Doctor Who*

L'allineamento, al contrario della concorrenza, sembra una domanda molto meno naturale; sorge però da diversi fronti, una volta che ci si avventuri abbastanza nella geometria euclidea.

Dalla degenerazione dei triangoli pedali, all'allineamento di tre punti sui lati, la ricerca di una maggiore generalità ci porterà presto a un primo accenno di geometria proiettiva e al concetto di similitudine, eccellenti strumenti per trovar rette.

3.1 UN TRIANGOLO SGONFIATO

Se il triangolo pedale di un punto P è degenere (ovvero una retta), ci troviamo in una singolare situazione: le perpendicolari dai suoi vertici ai lati concorrono nel punto P, ma le perpendicolari dai vertici ai suoi lati saranno rette parallele. Questo significa che tale punto P non avrà un coniugato isogonale in senso proprio (diremo che il suo coniugato isogonale è il punto all'infinito rappresentato dalla "direzione" delle rette parallele trovate).

Fatto 3.1.1. *Sia P un punto del piano. Allora, con la notazione precedente, vale la seguente relazione tra l'area del suo triangolo pedale e l'area del triangolo di riferimento*

$$\frac{[P_aP_bP_c]}{[ABC]} = -\frac{1}{4R^2}\operatorname{pow}_\Gamma(P) = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2},$$

dove Γ è la circonferenza circoscritta, O il suo centro e le aree sono prese con segno.

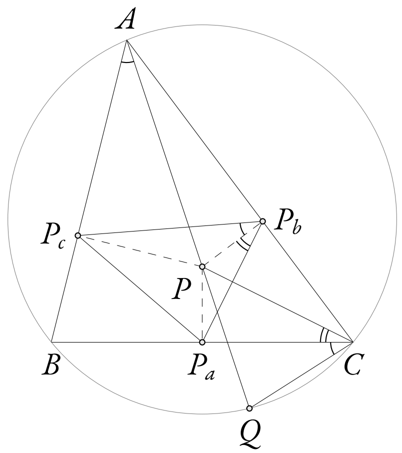

FIGURA 3.1
Area del triangolo pedale

Dimostrazione. Calcolando l'area

$$[P_aP_bP_c] = \frac{1}{2}P_aP_b \cdot P_bP_c \cdot \sin P_a\widehat{P_b}P_c = \frac{1}{2}PC\sin\gamma PA\sin\alpha\sin P_a\widehat{P_b}P_c,$$

notiamo che $P_a\widehat{P_b}P_c = P\widehat{A}P_c + P\widehat{C}P_a$; detta Q l'intersezione di PA con la circonferenza circoscritta al triangolo di partenza, possiamo concludere che $P\widehat{A}P_c = Q\widehat{A}B = Q\widehat{C}B$, quindi $P_a\widehat{P_b}P_c = P\widehat{C}Q$. Da ciò otteniamo

$$[P_aP_bP_c] = \frac{1}{2}PA \cdot PC\sin\alpha\sin\gamma\sin Q\widehat{C}P;$$

ma, nel triangolo QCP, si ha $PC\sin P\widehat{C}Q = PQ\sin P\widehat{Q}C = PQ\sin\beta$ e

$$[P_aP_bP_c] = \frac{1}{2}PA \cdot PQ\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2}(R^2 - OP^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

che è la tesi. □

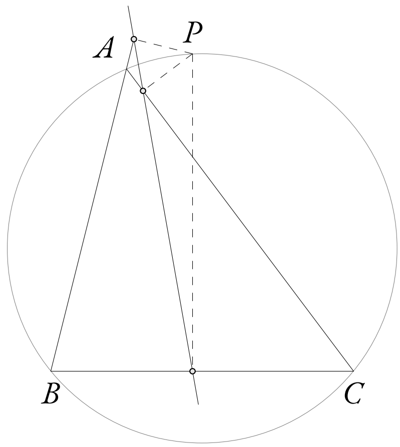

FIGURA 3.2
Retta di Simson

Da qui segue che P ha triangolo pedale degenere se e solo se giace sulla circonferenza circoscritta. Di questo fatto si può anche dare una dimostrazione diversa: poiché CP_aPP_b è ciclico e nella circonferenza a esso circoscritta CP è un diametro, abbiamo

$$P_aP_b = CP \sin\gamma = CP \cdot \frac{AB}{2R}$$

e così via. Dunque, il triangolo pedale di P è degenere se e solo se si verifica una delle seguenti uguaglianze triangolari:

$$\frac{CP \cdot AB}{2R} = \frac{AP \cdot BC}{2R} + \frac{BP \cdot AC}{2R},$$
$$\frac{BP \cdot AC}{2R} = \frac{AP \cdot BC}{2R} + \frac{CP \cdot AB}{2R},$$
$$\frac{AP \cdot BC}{2R} = \frac{CP \cdot AB}{2R} + \frac{BP \cdot AC}{2R}$$

e, in ognuno di questi casi, il Teorema di Tolomeo ci dice che A, B, C, P sono conciclici in qualche ordine.

Fatto 3.1.2 (Teorema di Simson)**.** *Le proiezioni di P sui lati di ABC sono allineate se e solo se P appartiene alla circonferenza circoscritta. La retta che le contiene è detta* retta di Simson di P.

Osservazione 3.1.3. Siano $x = d(P, s_A)$, $y = d(P, s_B)$, $z = d(P, s_C)$ e siano P_a, P_b, P_c le proiezioni di P; allora (nel triangolo pedale di P)

$$[P_bPP_c] = \frac{1}{2}yz \sin\alpha = \frac{ayx}{2R},$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta. Dunque

$$[P_aP_bP_c] = \frac{1}{4R}(ayz + bxz + cxy)\,.$$

Osservazione 3.1.4. Dal conto fatto con le aree, otteniamo che un punto P sta sulla circonferenza circoscritta se e solo se le sue distanze, con segno, dai lati rispettano $ayz + bxz + cxy = 0$.

Fatto 3.1.5. *Siano P_1 e P_2 sulla circonferenza circoscritta e siano r_1 e r_2 le loro rette di Simson; allora l'angolo tra di esse è pari a $\frac{P_1\widehat{O}P_2}{2}$.*

Dimostrazione. Sia Q_1 l'ulteriore intersezione della perpendicolare da P_1 a BC con la circonferenza circoscritta. Siano A_1, B_1, C_1 le proiezioni di P_1 su BC, CA, AB; allora A_1 e B_1 vedono PC sotto un angolo retto e dunque

$$A\widehat{Q_1}P_1 = A\widehat{C}P_1 = B_1\widehat{C}P_1 = B_1\widehat{A_1}P_1$$

ovvero, visto che P_1, A_1, Q_1 sono allineati, si ha che $r_1 \parallel AQ_1$.

Allo stesso modo, si ottiene Q_2 come ulteriore intersezione della perpendicolare da P_2 a BC e si ha che $AQ_2 \parallel r_2$.

Poiché $P_2Q_2 \parallel P_1Q_1$, si ha $Q_1\widehat{A}Q_2 = \frac{1}{2}P_1\widehat{O}P_2$, che è la tesi. □

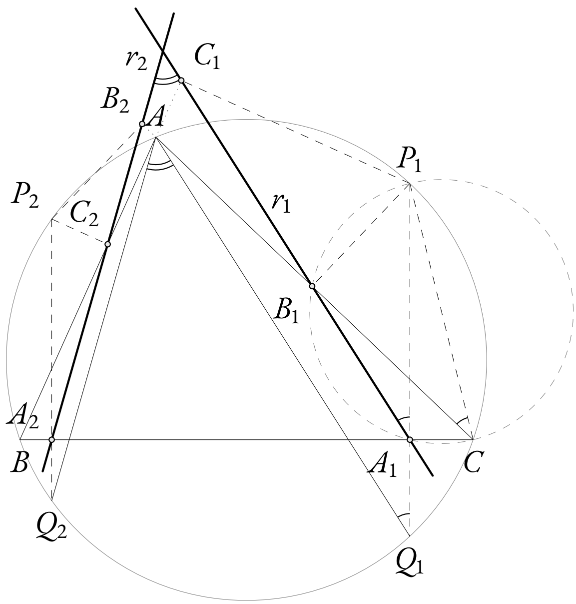

FIGURA 3.3
Angolo tra due rette di Simson

Osservazione 3.1.6. Se dunque P_1 e P_2 sono diametralmente opposti, le loro rette di Simson sono ortogonali.

Fatto 3.1.7. *La retta di Simson di un punto P passa per il punto medio del segmento HP, dove H è l'ortocentro.*

Dimostrazione. Consideriamo la proiezione P_b di P su AC e il simmetrico R di P rispetto ad AC. Ora, il simmetrico H^b di H rispetto ad AC giace sulla circonferenza circoscritta e dunque

$$R\widehat{H}H^b = P\widehat{H^b}H = P\widehat{H^b}B = P\widehat{C}B.$$

D'altra parte, $A\widehat{H}H^b = A\widehat{C}B$, e dunque $R\widehat{H}A + A\widehat{C}P$ è piatto; ma d'altra parte $A\widehat{C}P = A\widehat{Q}P$, se Q è l'ulteriore intersezione di PP_a con la circonferenza circoscritta. Questo vuol dire che HR è parallela alla retta di Simson di P.

Sia ora X l'intersezione tra HP e la retta di Simson. Abbiamo $XP_b \parallel HR$ e, poiché $RP_b = P_bP$, si ha anche che $HX = XP$. □

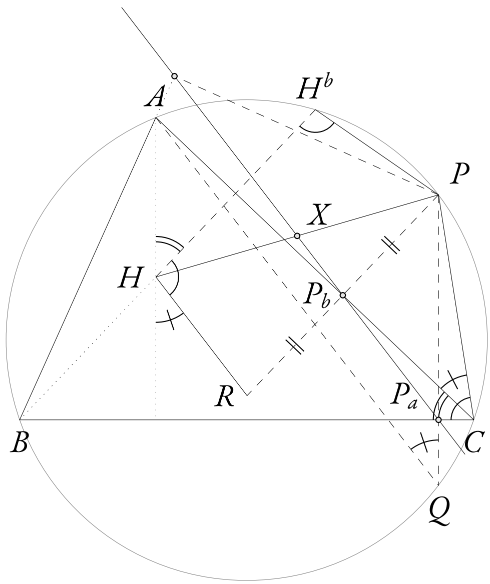

FIGURA 3.4
La retta di Simson biseca *HP*

Osservazione 3.1.8. Consideriamo ora il triangolo P_bP_cA; ovviamente risulta $PP_b \perp P_bA$ e $PPc \perp P_cA$. Se consideriamo gli assi di P_bA e P_cA, essi sono paralleli a PP_b e PP_c e dunque la loro intersezione è allineata con P e A ed è il loro punto medio. Dunque i circocentri di P_bP_cA, P_aP_cB, P_aP_bC sono i punti medi di AP, BP, CP. Quindi tali circocentri formano un triangolo simile a quello di partenza, in scala $1 : 2$, con circonferenza circoscritta tangente in P a quella circoscritta al triangolo di partenza e con ortocentro l'intersezione tra HP e la retta di Simson di P.

Osservazione 3.1.9. Le riflessioni di P rispetto ai lati sono allineate con l'ortocentro in una retta parallela a quella di Simson di P. Ripetendo la costruzione al contrario, data una retta per l'ortocentro, le sue riflessioni rispetto ai lati concorrono in un punto sulla circonferenza circoscritta.

Esercizio infinitario. Dimostrare che, se P è un punto della circonferenza circoscritta, le simmetriche rispetto alle bisettrici interne delle sue ceviane sono parallele. Determinarne l'inclinazione rispetto alla retta di Simson di P.

Esempio 3.1.1. Sia M il punto medio dell'arco AB che non contiene C; allora CM è la bisettrice interna ed M è equidistante dalle rette AC e BC. Dunque le proiezioni M_1 e M_2 su BC e AC sono equidistanti da C, ovvero $M_1C = M_2C$. Questo significa che la retta di Simson di M, che passa per M_1 e M_2, è perpendicolare alla bisettrice interna e passa per il punto medio del lato AB.

Esempio 3.1.2. Sia A' il punto diametralmente opposto ad A, allora le sue proiezioni su AC e AB sono C e B, in quanto AA' è un diametro e dunque $A\widehat{B}A' = A\widehat{C}A' = \frac{\pi}{2}$. Dunque la retta di Simson di A' è BC, che è dunque perpendicolare all'altezza da A, che è la retta di Simson di A.

ESERCIZI

Esercizio 3.1.1. *Sia D un punto interno a un triangolo acutangolo ABC tale che $A\widehat{D}B = A\widehat{C}B + \frac{\pi}{2}$ e $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Si calcoli $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$.*

Esercizio 3.1.2. *Sia P un punto interno al triangolo ABC tale che si abbia $A\widehat{P}B - A\widehat{C}B = A\widehat{P}C - A\widehat{B}C$. Siano D, E gli incentri di APB e APC rispettivamente. Dimostrare che AP, BD, CE concorrono.*

Esercizio 3.1.3. *Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e siano P, Q, R i piedi delle altezze da D a AB, BC, CA. Dimostrare che, se $PR = RQ$, allora le bisettrici di $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{D}C$ concorrono su AC.*

Esercizio 3.1.4. *Sia $PQRS$ un quadrilatero ciclico con $P\widehat{S}R = \frac{\pi}{2}$ e siano H, K le proiezioni di Q su PR e PS. Dimostrare che HK biseca QS.*

Esercizio 3.1.5. *Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico tale che BCD e CDA non siano equilateri. Dimostrare che se la retta di Simson di A rispetto a BCD è perpendicolare alla retta di Eulero di CDA, allora la retta di Simson di B rispetto a ACD è perpendicolare alla retta di Eulero di BCD.*

3.2 LUNGHEZZA SENZA LARGHEZZA

Sia ABC un triangolo e siano D, E, F punti sulle rette dei lati BC, CA, AB. Utilizziamo la notazione

$$h_x = d(F, BC), \quad h_y = d(D, AC), \quad h_z = d(E, AB),$$

dove h_a, h_b, h_c sono le tre altezze del triangolo. Ricordiamo che aree e distanze sono considerate con segno.

Fatto 3.2.1 (Teorema di Menelao)**.** *D, E, F sono allineati se e solo se*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1\,.$$

Dimostrazione. D, E, F sono allineati se e solo se DEF è degenere. In tal caso, si deve avere

$$[ABC] = [FBD] + [EDC] + [AFE]\,.$$

Ora, si ha

$$\frac{h_x}{h_a} = -\frac{FB}{BA} \quad \frac{h_y}{h_b} = -\frac{DC}{CB} \quad \frac{h_z}{h_c} = -\frac{EA}{AC}\,.$$

Del resto

$$2[FBD] = h_x \cdot BD\,, \quad 2[EDC] = h_y \cdot EC\,, \quad 2[AFE] = h_z \cdot AF\,,$$

ovvero

$$2[FBD] = h_a \cdot \frac{FB}{BA} \cdot \frac{DB}{BC} BC, \quad 2[EDC] = h_b \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{EC}{CA} CA,$$

$$2[AFE] = h_c \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{FA}{AB} AB.$$

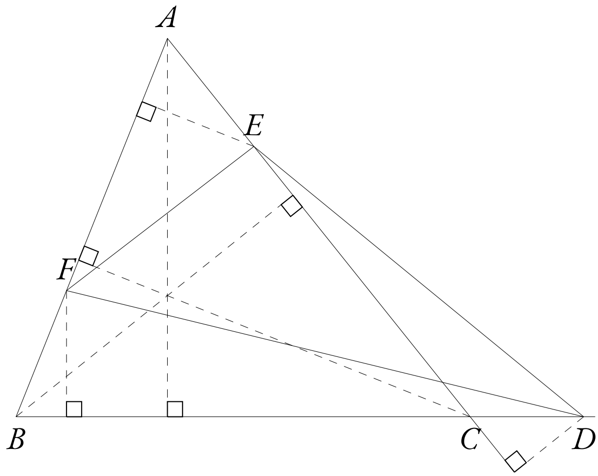

FIGURA 3.5
Area del triangolo *DEF*

Sommando, si ottiene

$$h_a \cdot \frac{FB}{BA} \cdot \frac{DB}{BC} BC + h_b \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{EC}{CA} CA + h_c \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{FA}{AB} AB,$$

ovvero

$$2[ABC] \cdot \frac{FB}{BA} \cdot \frac{DB}{BC} + 2[ABC] \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{EC}{CA} + 2[ABC] \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{FA}{AB}.$$

L'allineamento si verifica se e solo se questa somma è pari a $2[ABC]$; dunque, dividendo per $2[ABC]$, si deve avere

$$\frac{FB}{BA} \cdot \frac{DB}{BC} + \frac{DC}{CB} \cdot \frac{EC}{CA} + \frac{EA}{AC} \cdot \frac{FA}{AB} = 1.$$

Ora, se $\frac{BD}{DC} = x$, allora $\frac{DC}{CB} = \frac{1}{x+1}$ e $\frac{DB}{BC} = 1 - \frac{1}{x+1}$; sostituendo ciclicamente, otteniamo

$$\frac{1}{z+1} \cdot \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1} + \frac{1}{y+1} \cdot \frac{z}{z+1} = 1\,,$$

ovvero

$$x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) = (x+1)(y+1)(z+1)$$

$$xy + yz + zx + x + y + z = xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1$$

$$xyz + 1 = 0\,,$$

da cui si ha che D, E, F sono allineati se e solo se

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1\,,$$

che è la tesi. □

Osservazione 3.2.2. Come corollario, otteniamo l'area del triangolo DEF.

$$[DEF] = [ABC]\left(1 - \frac{FB}{BA} \cdot \frac{DB}{BC} + \frac{DC}{CB} \cdot \frac{EC}{CA} + \frac{EA}{AC} \cdot \frac{FA}{AB}\right)$$

Osservazione 3.2.3. Dati tre punti D, E, F tali che AD, BE, CF concorrono in P, se D', E', F' sono i punti che dividono i lati nei rapporti con segno opposto, allora sono allineati. Infatti, dal Teorema di Ceva,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

e dunque, visto che $\frac{BD'}{D'C} = -\frac{BD}{DC}$ e così via, si ha

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE'}{E'A} \cdot \frac{AF'}{F'B} = -1\,.$$

Osservazione 3.2.4. Inoltre, si ha anche

$$\frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

e dunque il lato EF del triangolo ceviale di P taglia BC nel punto D'. Questo significa che, dato il triangolo ceviale di un punto P, le intersezioni $EF \cap BC$, $FD \cap CA$, $DE \cap AB$ sono allineate e sono i punti D', E', F' definiti sopra.

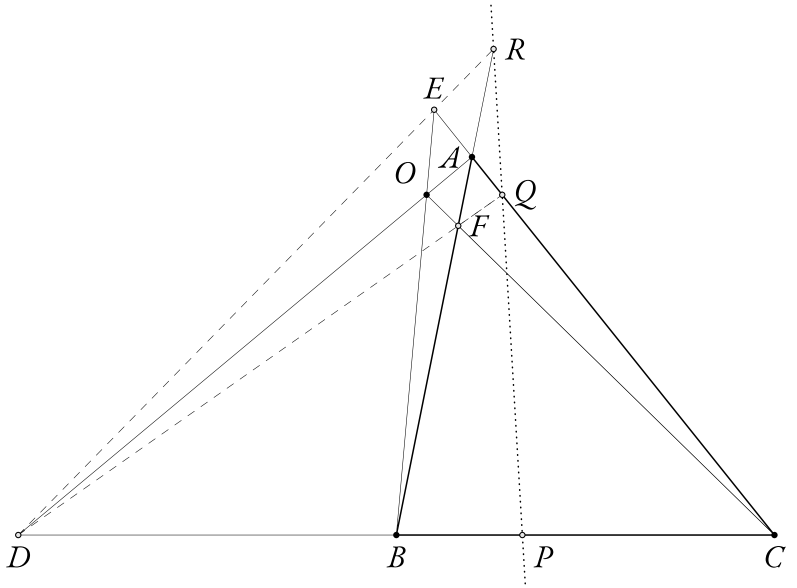

FIGURA 3.6
Teorema di Desargues

Generalizzando i discorsi precedenti, otteniamo un interessante risultato di allineamento.

Fatto 3.2.5 (Teorema di Desargues). *Siano A, B, C, D, E, F tali che AD, BE, CF concorrono in un punto O; allora* $P = BC \cap EF$, $Q = CA \cap FD$, $R = AB \cap DE$ *sono allineati.*

Dimostrazione. Applicando il teorema di Menelao al triangolo BCO tagliato dalla trasversale per F, E, P, si ha

$$\frac{BP}{PC}\frac{CF}{FO}\frac{OE}{EB} = -1\,.$$

Applicandolo al triangolo CAO e alla trasversale per F, D, Q, si ha

$$\frac{CQ}{QA}\frac{AD}{DO}\frac{OF}{FC} = -1\,.$$

Applicandolo al triangolo ABO con la trasversale per D, E, R si ha

$$\frac{AR}{RB}\frac{BE}{EO}\frac{OD}{DA} = -1\,.$$