3.

I CENTO PROBLEMI SELEZIONATI

In questo capitolo riportiamo i testi di cento problemi di "Flatlandia" selezionati tra quelli assegnati dall'anno 1997-1998 all'anno 2020-2021. Per ogni anno scolastico, da ottobre a maggio, sono stati proposti otto problemi, tranne per il 2008-2009 e 2009-2010, dove, per difficoltà organizzative, ne sono stati proposti rispettivamente 4 e 5. In totale, quindi, sono stati assegnati 193 problemi. I testi di alcuni problemi, per l'inserimento in questa raccolta, sono stati leggermente modificati nella forma, senza però cambiare le ipotesi e le richieste rispetto agli originali, perché, particolarmente negli anni iniziali, avevano la forma di attività in classe, da svolgere prevalentemente con l'uso di un software di geometria dinamica.

Nel testo dei problemi, e anche nella risoluzione (vedi capitolo 4), abbiamo utilizzato come sinonimi i termini "uguale" e "congruente" per le figure geometriche, soprattutto per non appesantire il linguaggio e la scrittura. Inoltre per lo stesso motivo, a volte, non abbiamo distinto tra la misura di un segmento e il segmento stesso e analogamente tra l'ampiezza di un angolo e l'angolo stesso. Nei primi anni i testi non contenevano quasi mai figure, al contrario di quel che si verifica nel decennio più recente – dal 2010 circa – in cui i problemi sono quasi sempre stati proposti insieme a una o più figure, in modo da rendere meno prolissi e più chiari i testi. Molti problemi di Flatlandia richiedono anche delle costruzioni geometriche, da eseguire con "riga e compasso" oppure con un software di geometria dinamica. Spesso il testo del problema si concludeva con la richiesta di "motivare le risposte". Questa frase è stata omessa in tutti quei problemi nei quali si richiedeva un'esplicita dimostrazione di una proprietà, ossia una giustificazione motivata di quanto affermato mediante opportuni passaggi.

I testi dei problemi sono qui di seguito presentati in ordine cronologico, suddivisi per l'anno e il mese in cui sono stati proposti. In tutto, gli anni scolastici sono venticinque. In questo capitolo riportiamo solo i testi di cento problemi, con le eventuali figure proposte. Questi problemi sono stati risolti nel successivo capitolo 4. Come detto, i problemi sono particolarmente adatti a essere proposti nel Primo biennio della Scuola secondaria di 2° grado. Molti di essi possono essere presentati anche in una Scuola secondaria di 1° grado, prevalentemente con l'uso di un software di geometria dinamica. Lo scopo dei problemi è chiaramente di tipo didattico e vuole stimolare gli studenti a cimentarsi nella costruzione di figure geometriche, nella scoperta di proprietà e nella loro giustificazione, per arrivare successivamente, nella scuola secondaria di 2° grado, alla loro dimostrazione.

Problema 3.1 (Gennaio 1998)**.** Dato un trapezio isoscele $ABCD$, con AB base maggiore e CD base minore, tracciare le diagonali AC e BD, indicando con O il loro punto di intersezione.

a) Si confrontino i triangoli AOD, BOC e le loro aree. Che cosa si osserva?
b) Dato ora un qualunque trapezio $ABCD$, quali delle proprietà precedenti dei triangoli AOD e BOC si conservano?

Problema 3.2 (Marzo 1998)**.** Siano date due circonferenze, con raggi diversi, secanti nei punti A e B.

a) Costruire, con riga e compasso, una retta t tangente a entrambe le circonferenze.
b) Detti T e T' i punti di tangenza della retta t con le due circonferenze, dimostrare che la retta AB interseca il segmento TT' nel suo punto medio.

Problema 3.3 (Maggio 1998)**.** Sia dato un triangolo ABC, rettangolo in A. Inscrivere in esso il quadrato $AEDF$, con E su AB, D su BC e F su AC, e costruire il quadrato $ABGH$, esterno al triangolo, con G opposto ad A.

a) Quale legame intercorre tra i punti C, E e G? Giustificare la risposta.
b) Motivare la costruzione del quadrato $AEDF$.

Problema 3.4 (Novembre 1998)**.** Dato un quadrato $ABCD$, si considerino i segmenti AM e AN, dove M e N sono rispettivamente i punti medi dei lati BC e CD.

a) Dimostrare che la diagonale BD è divisa dai segmenti AM e AN in tre parti congruenti.
b) Questa proprietà vale anche in altri quadrilateri? Quali? Perché?

Problema 3.5 (Febbraio 1999)**.**

a) Costruire un quadrilatero convesso $ABCD$, diviso dalla diagonale AC in due triangoli congruenti.
   1) Quali e quanti tipi di quadrilateri si possono ottenere? Motivare le risposte.
   2) Dimostrare che in ognuno dei casi individuati la retta AC dimezza la diagonale BD.
   3) Le figure ottenute presentano delle simmetrie?
b) Come possono variare i vertici B e D se vogliamo ora che il quadrilatero $ABCD$ sia diviso dalla retta AC in due triangoli equivalenti? In tal caso che cosa succede alla diagonale BD?

Problema 3.6 (Ottobre 1999)**.** Dato un quadrato, costruire un rettangolo in esso inscritto con i lati paralleli alle diagonali del quadrato. Consideriamo ora l'insieme di tali rettangoli.

a) Qual è la relazione fra i loro perimetri?
b) Qual è il rettangolo di area massima? Qual è il rapporto fra la sua area e quella del quadrato assegnato?

Problema 3.7 (Febbraio 2000)**.** In un triangolo ABC siano D, E e F i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC e AC.

a) Quale relazione intercorre tra le superfici del quadrilatero $BEFD$ e quelle dei triangoli AEF e FCD?
b) Tale relazione si conserva se F è un punto qualunque del lato AC?

Problema 3.8 (Aprile 2000)**.** È data una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r.

a) Costruire il quadrato $SPQR$ inscritto in essa, con il lato SP sul diametro AB. Giustificare la costruzione.
b) Calcolare il lato del quadrato $SPQR$ in funzione di r.

4.

SOLUZIONI DEI CENTO PROBLEMI SELEZIONATI

In questo capitolo presentiamo le soluzioni di cento problemi di "Flatlandia" i cui testi sono stati selezionati nel cap. 3. Le soluzioni proposte sono adatte a studenti dei primi anni di scuola secondaria di 2° grado e sono presentate utilizzando le nozioni e i metodi della geometria sintetica, prevalentemente piana. Talvolta, quando il problema lo consente, sono anche state utilizzate le trasformazioni geometriche elementari, congruenze e similitudini, e anche metodi di geometria analitica. Molti problemi richiedono una costruzione con "riga e compasso" o, in modo equivalente, utilizzando un software di geometria dinamica. Si tratta, perlopiù, di classiche costruzioni geometriche che sono alla base dello studio della geometria e che molto aiutano, in modo operativo, nella risoluzione di un problema. Una figura è di grande supporto nel risolvere un problema geometrico dove, come è noto, è "meglio una figura in più che una in meno". Alcune di queste costruzioni possono far riscoprire, anche senza una trattazione teorica, i classici metodi di risoluzione dei problemi geometrici, tra i quali il metodo di analisi e sintesi, il metodo dei luoghi geometrici, il metodo delle trasformazioni geometriche.

Diversi problemi possono essere utilizzati per un'introduzione allo studio della geometria euclidea e in particolare per un avvio alla dimostrazione in matematica. Naturalmente i problemi sono adatti anche per studenti – soprattutto di scuola secondaria – che vogliano cimentarsi con quesiti geometrici di tipo dimostrativo. Essi sono stati pensati anche per proporre un'attività in classe, "per motivare, ragionare e discutere". Molti si prestano ad attività di scoperta e congettura di proprietà anche mediante l'uso di un software di geometria dinamica, oltre che con "carta, matita, riga e compasso". L'obiettivo fondamentale di "Flatlandia" riguarda l'argomentazione e la dimostrazione. L'insegnante può quindi trovare in questa raccolta di problemi una risorsa, che riteniamo particolarmente utile dal punto di vista didattico, per sviluppare queste attività in classe. Ciò non toglie che essa possa essere utilizzata anche in corsi preparatori alle gare di matematica, quelle in cui si privilegia l'aspetto dimostrativo dei quesiti. Anche se i problemi proposti sono prevalentemente di tipo dimostrativo, alcuni di questi possono essere proposti nella scuola secondaria di 1° grado, chiedendo in questo caso agli allievi una giustificazione intuitiva delle proprietà geometriche osservate con l'uso di un software di geometria dinamica. Teniamo a sottolineare, ancora, che in questo capitolo sono proposte una o più soluzioni dei problemi, tra le diverse che si potrebbero dare. Le soluzioni proposte privilegiano l'uso di metodi di geometria sintetica, rispetto a eventuali soluzioni di tipo analitico (che fanno cioè uso dell'algebra e della geometria analitica). Inoltre, tra le possibili soluzioni di uno stesso problema, sono state privilegiate quelle più vicine alla prassi didattica nella scuola secondaria. I problemi sono stati raggruppati per mese e anno in cui sono stati proposti.

Nota. Per semplicità usiamo spesso come sinonimi "congruente" e "uguale" per i segmenti, per gli angoli e più in generale per le figure geometriche. Analogamente non usiamo simboli diversi per un segmento oppure per la misura del segmento o per l'ampiezza di un angolo e l'angolo stesso. Abbiamo quasi sempre preferito usare quindi un linguaggio vicino all'intuizione. Questo per semplicità, anche se siamo consapevoli che queste scelte possono essere criticabili, soprattutto se vogliamo che i nostri allievi imparino a usare un linguaggio matematico corretto.

Alcuni dei teoremi e delle formule che utilizzeremo in questo capitolo sono stati inseriti nel capitolo 1. Sempre per semplicità, indicheremo l'area di un triangolo ABC con (ABC) e analogamente per gli altri poligoni.

I problemi di cui diamo la risoluzione riportano la numerazione assegnata nel capitolo 3 contenente i testi dei cento problemi selezionati.

Soluzione al problema 3.1 (Gennaio 1998).
a) Dalla congruenza dei triangoli ABD e ABC (figura 4.1) deduciamo che $A\widehat{B}D = B\widehat{A}C$ e quindi il triangolo ABO è isoscele sulla base AB; ne segue che $AO = OB$. Poiché le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti, se ne deduce che $DO = OC$. I triangoli AOD e BOC sono perciò congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli e sono anche in particolare equivalenti.
b) Se ora $ABCD$ è un trapezio, non isoscele, i triangoli AOD e BOC non sono più congruenti, ma sono ancora equivalenti (figura 4.2). Infatti

$$(AOD) = (ABD) - (AOB) \quad \text{e} \quad (BOC) = (ABC) - (AOB).$$

I triangoli ABD e ABC sono equivalenti poiché hanno basi e altezze relative congruenti. Perciò i triangoli AOD e BOC sono equivalenti in quanto differenze di figure equivalenti.

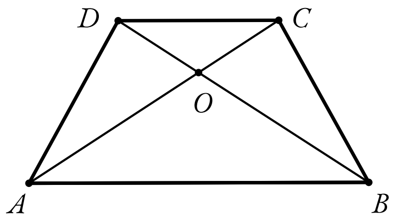

FIGURA 4.1
Problema Gennaio 1998

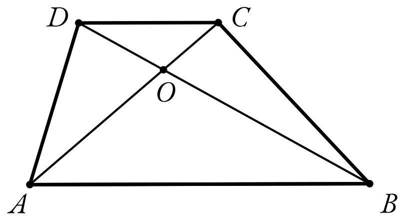

FIGURA 4.2
Problema Gennaio 1998

Soluzione al problema 3.2 (Marzo 1998).
a) Date le due circonferenze secanti nei punti A e B, si tracci la retta dei centri OO'. Scelto un punto P, non appartenente alla retta dei centri, sulla circonferenza di centro O, si conduca la retta passante per O' e parallela al raggio OP. Sia ora P' il punto di intersezione tra questa retta e la circonferenza di centro O', situato dalla stessa parte di P rispetto alla retta dei centri. La retta PP' interseca la retta dei centri nel punto C (figura 4.3). Il punto C è uno dei due centri di omotetia rispetto al quale si corrispondono le circonferenze date. Dal punto C si traccino le tangenti alla circonferenza di centro O' con la seguente costruzione: consideriamo la circonferenza di diametro $O'C$ e indichiamo con R il suo centro. Intersechiamo questa circonferenza

con quella di centro O'. Otteniamo i punti T' e F. Le rette CT' e CF sono le tangenti comuni alle due circonferenze date (figura 4.4).

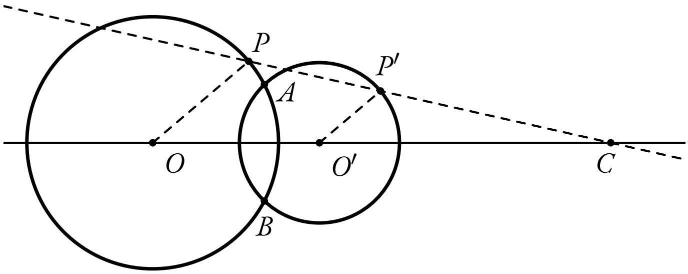

FIGURA 4.3
Problema Marzo 1998

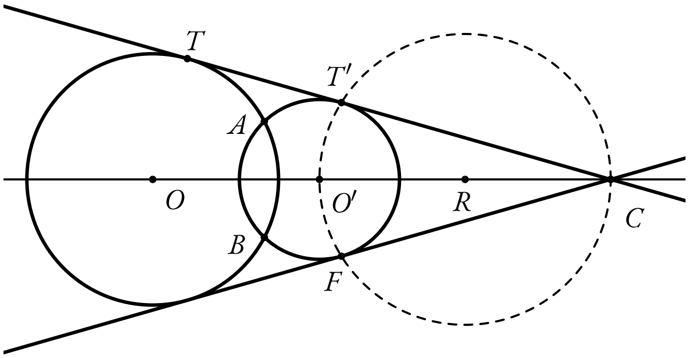

FIGURA 4.4
Problema Marzo 1998

b) Indicato con M il punto d'incontro della retta AB con la tangente, applicando il teorema della tangente e della secante (condotte da M) otteniamo le due proporzioni (figura 4.5):

$$MA : TM = TM : MB \quad \text{e} \quad MA : T'M = T'M : MB$$

da cui otteniamo $TM^2 = MA \cdot MB$ e $T'M^2 = MA \cdot MB$. Quindi $TM^2 = T'M^2$ da cui si ricava $TM = T'M$ e M è quindi il punto medio del segmento TT'.

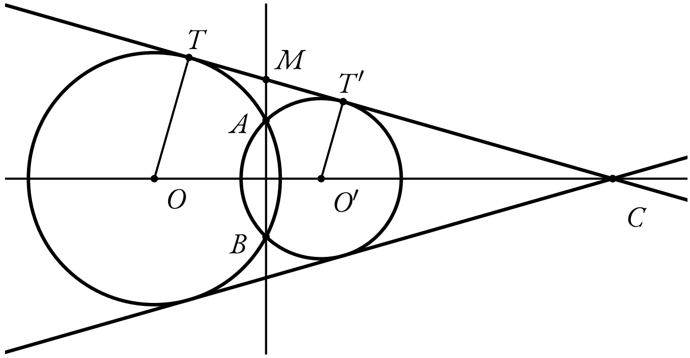

FIGURA 4.5
Problema Marzo 1998

Soluzione al problema 3.3 (Maggio 1998)**.**
a) Sia $AEDF$ il quadrato inscritto nel triangolo rettangolo ABC e $AHGB$ il quadrato esterno al triangolo di lato AB (figura 4.6). Dimostriamo che i punti C, E, G sono allineati. Poiché i triangoli FDC e EBD sono simili, si ha $\frac{FD}{EB} = \frac{CF}{DE}$. Si ha inoltre

$$\frac{FD}{EB} = \frac{AE}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \frac{AB}{EB} - 1$$

e anche

$$\frac{CF}{DE} = \frac{CF}{AF} = \frac{CA - AF}{AF} = \frac{CA}{AF} - 1\,.$$

Quindi $\frac{AB}{EB} - 1 = \frac{CA}{AF} - 1$, ossia $\frac{AB}{EB} = \frac{CA}{AF}$ e pertanto $\frac{BG}{EB} = \frac{CA}{AE}$. Se ne deduce che i triangoli ACE e BGE hanno due lati in proporzione e gli angoli compresi (retti) congruenti e sono quindi simili. In particolare gli angoli $A\widehat{E}C$ e $B\widehat{E}G$ sono congruenti. Ma allora $A\widehat{E}C + A\widehat{E}G = B\widehat{E}G + A\widehat{E}G = 180°$, quindi i tre punti C, E, G sono allineati.
b) Osserviamo che il quadrato $AEDF$ citato nel testo è unico (basta osservare che se, per esempio, aumentiamo la misura del lato AE, necessariamente diminuisce quella del lato AF e quindi il rettangolo $AEDF$ non è un quadrato).
Prima soluzione. Per costruire tale quadrato tracciamo la bisettrice dell'angolo in A del triangolo dato e indichiamo con D la sua intersezione con l'ipotenusa BC. Dal punto D conduciamo le perpendicolari DE e DF ai lati AB e CA, rispettivamente (vedi figura 4.7). Il quadrilatero $AEDF$ è

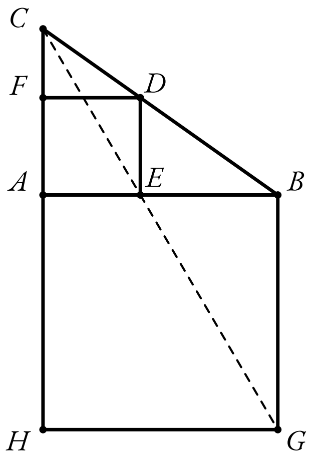

FIGURA 4.6
Problema Maggio 1998

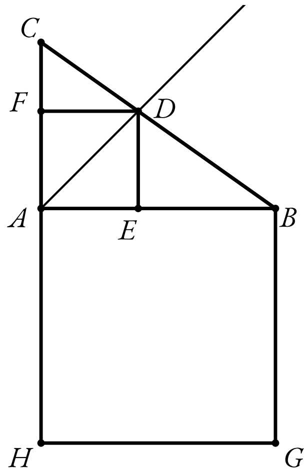

FIGURA 4.7
Problema Maggio 1998

un quadrato avendo tutti gli angoli retti e due lati consecutivi (DE e DF) congruenti in quanto D appartiene alla bisettrice dell'angolo in A.
Seconda soluzione. Dato il triangolo ABC, costruiamo il quadrato $ABGH$. Uniamo il punto C con G e indichiamo con E l'intersezione con il lato AB (figura 4.6). Proviamo ora che AE è proprio il lato del quadrato inscritto nel triangolo rettangolo. Dalla similitudine dei triangoli CAE e CHG, si ha $AE : HG = CE : CG$. Indichiamo con D il punto di intersezione tra BC e la perpendicolare condotta da E ad AB. I due triangoli CDE e CBG sono allora simili e quindi $CE : CG = DE : BG$. Dal confronto tra le due proporzioni si ricava $AE : HG = DE : BG$. Ma HG e GB sono lati dello stesso quadrato e quindi, dalla precedente proporzione, segue che AE è congruente a DE. Se tracciamo, ora, da D la parallela ad AB fino a incontrare in F il lato AC, si ottiene quindi il quadrato $AEDF$ richiesto.

Nota. Nella prima parte del problema abbiamo dimostrato l'allineamento di tre punti. La verifica di questa proprietà è piuttosto delicata perché si rischia di utilizzare come ipotesi, nella dimostrazione, proprio la tesi, anche per la difficoltà di utilizzare una figura "adeguata". In questo caso l'uso di un software di geometria non è di particolare aiuto, perché la figura costruita con questo strumento avrà i punti C, E e G che sono "visivamente" allineati.