Ruggero Carli, Francesco Rizzotto

Primi passi in probabilità

Carte, dadi e monete

scienza
express

1.

DEFINIZIONI DI BASE

Come ogni altro capitolo della matematica anche il ***Calcolo delle probabilità*** richiede, per prima cosa, l'apprendimento di alcuni termini specifici a cominciare dalla parola *probabile*: essa deriva dal latino *probare* che significa *provare* o *verificare*. Pertanto, dire che un fatto è *probabile* significa affermare che quel fatto *si può verificare*.

L'obiettivo che ci poniamo nel seguito è quantificare numericamente quanto probabile possa essere un determinato fatto.

Per fare ciò dobbiamo, prima di tutto, introdurre alcuni termini specifici, quali esiti, eventi e casi, per poi dare una definizione di probabilità.

1.1 ESITI, EVENTI E CASI

Gli **esiti** sono i *possibili risultati di un'azione, di un esperimento o di un gioco*.

Esempi di esiti sono i seguenti.

(a) Nel *lancio di una moneta* gli esiti sono due, chiamati comunemente testa (T) e croce (C).

(b) Nel *lancio di un dado, con le facce numerate da* 1 *a* 6, gli esiti sono sei: precisamente, ogni singolo punteggio su una faccia costituisce un esito.

(c) Nell'*estrazione di una carta da un mazzo di* 40 *carte* gli esiti sono quaranta: precisamente ognuna delle quaranta carte costituisce un possibile esito.

(d) Nell'*estrazione di una pallina da un'urna contenente dieci palline di tre colori diversi* gli esiti sono tanti quanti i colori delle palline.

Gli **eventi** costituiscono delle *previsioni* sulla natura dell'esito di un'azione. Un evento può coincidere con un singolo esito o essere rappresentato da un insieme di esiti.

Esempi di esiti sono i seguenti.

(a) Nel lancio di un dado alcuni eventi che si possono prevedere sono: *ottenere il numero* 6 oppure *ottenere un numero pari*. Nel primo caso l'evento coincide con uno dei sei esiti possibili, nel secondo caso invece l'evento è rappresentato dall'insieme dei tre esiti, *ottenere il numero* 2, *ottenere il numero* 4 oppure *ottenere il numero* 6.

(b) Nell'estrazione di una carta da un mazzo di quaranta carte si può prevedere di *ottenere un asso* oppure si può prevedere di *ottenere una carta di cuori*. Il primo è un evento che si verifica in quattro esiti distinti mentre il secondo è un evento che si manifesta attraverso dieci esiti diversi.

(c) Nel lancio di una moneta, ripetuto 2 volte, si possono fare queste previsioni: *ottenere una sola testa*, *ottenere almeno una testa*, *ottenere nessuna croce*, *ottenere croce al secondo lancio*. Sono tutte previsioni, cioè eventi, diversi.

Negli esempi sopra riportati gli eventi considerati hanno sempre qualche possibilità di verificarsi ma non è escluso che qualche volta venga formulata una previsione che non può avere riscontri, come mostrano gli esempi seguenti.

(d) Nel lancio di un dado con le facce numerate da 1 a 6, prevedere che risulti la faccia con 8 punti.

(e) Nella scelta casuale di due carte da un mazzo la previsione che saranno due assi di fiori potrà realizzarsi solo se la scelta delle carte avviene con reinserimento mentre, se avviene senza reinserimento o in blocco, non potrà avere riscontro positivo.

Analogamente, se da un'urna che contiene dieci palline numerate da 1 a 10 si prendono due palline a caso, la previsione che per due volte uscirà il numero 5 potrà realizzarsi solo se l'estrazione avviene con reinserimento mentre, se avviene senza reinserimento o in blocco, non potrà avere riscontro positivo.

Casi è il nome che assumono gli *esiti* quando essi sono *ugualmente possibili* (o *ugualmente attesi*).

Sorge, quindi, spontaneo chiedersi quando gli esiti sono ugualmente possibili. Gli esempi seguenti chiariscono questo importante aspetto.

(a) Consideriamo il lancio di una moneta che supponiamo non essere truccata. Allora i due esiti, testa (T) e croce (C), sono ugualmente possibili e quindi costituiscono due casi.

(b) Consideriamo il lancio di un dado che supponiamo non essere truccato. Allora tutti i punteggi da 1 a 6 sono esiti ugualmente possibili; essi, pertanto, costituiscono 6 casi.

(c) Consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte, che supponiamo non essere truccato. Allora, non essendoci motivo di pensare che una certa carta abbia più possibilità o meno possibilità di essere estratta rispetto alle altre, tutte le carte sono ugualmente attese, quindi si hanno quaranta casi.

(d) Consideriamo l'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene dieci numerate da 1 a 10. Supponiamo che l'estrazione sia fatta *alla cieca* e che le palline siano indistinguibili al tatto. Allora, non essendoci motivo di pensare che una certa pallina abbia più possibilità o meno possibilità di essere estratta rispetto alle altre, tutte le palline sono ugualmente attese e, quindi, i casi possibili sono dieci.

Consideriamo ora due esempi un po' più delicati.

(e) Si deve estrarre una pallina da un'urna che ne contiene dieci : cinque rosse, tre nere e due bianche. L'esito dell' estrazione è necessariamente uno di questi tre: pallina rossa, nera o bianca. Sarebbe però un grave errore ritenere questi tre esiti come tre casi possibili. È facile capire, infatti, che una pallina rossa è attesa con più fiducia rispetto a una bianca. Pertanto, questi tre esiti non sono ugualmente attesi e dunque non costituiscono dei casi. Come nell'esempio dell'urna con le palline numerate, ad essere ugualmente attese sono le singole palline, quindi i casi possibili sono dieci.

(f) Nel lancio di due dadi se si guarda alla somma dei punti ottenuti, gli esiti possibili sono undici, precisamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Sarebbe però un grave errore ritenere questi esiti come dei casi possibili. È facile capire, infatti, che la somma 12 si presenta solo se i punti sono sei in entrambi i dadi mentre la somma 5 può risultare da queste coppie di punteggi: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Pertanto, gli undici diversi valori della somma dei punteggi non sono esiti ugualmente attesi e quindi non li possiamo considerare dei casi. Allora, se la somma dei punti non va bene, cosa dobbiamo considerare come esiti dei vari lanci dei due dadi se si vuole che risultino ugualmente attesi? Normalmente i dadi sono di colore diverso, poniamo rosso (R) e verde (V), in questo modo riusciamo a distinguere le varie coppie di punteggi, come ad esempio la coppia (2R, 3V) dalla coppia (3R, 2V) la cui somma dei punti è per entrambe 5. Poiché i risultati sul dado rosso sono sei così come quelli sul dado verde, le coppie di risultati, essendo del tipo (xR, yV) con x e y numeri interi compresi tra 1 e 6, sono in totale trentasei e sono ugualmente attese perché non c'è motivo di ritenere che ci sia una qualche coppia privilegiata o sfavorita rispetto alle altre. Pertanto i casi possibili sono le trentasei coppie di punteggi.

Osservazione 1.1.1. Senza doverlo precisare ogni volta, in tutti gli esempi e problemi che saranno proposti, le monete, i dadi, i mazzi di carte e le urne con palline vanno considerati in condizioni normali, cioè *non truccati*. Inoltre, i dadi vanno considerati con le facce numerate da 1 a 6.

1.2 CONCETTO DI PROBABILITÀ

Introdotti alcuni concetti base, proseguiamo con la descrizione del concetto centrale del presente lavoro, ovvero quello di probabilità di un evento. In matematica, si sa, le valutazioni e i confronti si fanno in termini quantitativi assegnando alle cose valori numerici che ne misurino una certa *caratteristica*. Per ogni evento la caratteristica che interessa è la sua *fattibilità*, cioè la possibilità che si verifichi, e per quantificarla è necessario, quindi, assegnarle un valore numerico.

Pertanto, chiamiamo **probabilità di un evento** *un numero che misura la possibilità che l'evento si verifichi*.

Se a ogni evento si associa un numero che ne indica in quale misura esso può verificarsi allora possiamo confrontare fra loro i vari eventi e stabilire quale ha maggiore possibilità di realizzarsi e quale ne ha meno.

Introdotto il concetto di probabilità, stabiliamo alcune regole di base.

1. A ogni ***evento impossibile***, ovvero un evento che non si verificherà mai (ad esempio, ottenere 10 lanciando un comune dado), si assegna il valore di probabilità 0.
2. A ogni ***evento certo***, ovvero un evento che si verificherà sicuramente (ad esempio, ottenere testa o croce lanciando una moneta), si assegna il valore di probabilità 1.
3. Ogni altro ***evento***, che può verificarsi oppure no, ha un valore di probabilità compreso fra 0 e 1.
4. Il valore della *probabilità di un evento sarà tanto maggiore quanto più alta è la possibilità che si verifichi*.

Per calcolare concretamente la probabilità di un evento, introduciamo ora i concetti di ***casi possibili*** e ***casi favorevoli*** attraverso l'analisi di due semplici esempi.

Nel lancio di un dado gli esiti ugualmente attesi, ovvero i casi, sono sei. Questi ultimi sono detti *casi possibili*. Se fra i vari eventi che si possono verificare si prevede che si realizzi l'evento

$$E : \text{“\textit{ottenere un multiplo di} 3”},$$

allora il 3 e il 6 sono due *casi favorevoli* all'evento E previsto.

Se da un mazzo di quaranta carte si estrae una carta, ci sono quaranta esiti ugualmente attesi, cioè quaranta *casi possibili*. Poniamo che, fra le molte previsioni che si possono fare, si preveda l'evento

$$E : \text{“\textit{estrarre un asso}”}.$$

Essendo quattro gli assi presenti in un mazzo, allora ci sono quattro *casi favorevoli* all'evento E previsto.

In generale, i casi possibili rappresentano tutti i casi che si possono verificare, mentre i casi favorevoli rappresentano solamente i casi in cui l'evento di cui si vuole calcolare la probabilità effettivamente si verifica.

In tutte le situazioni come le due precedenti, in cui si è in grado di calcolare il numero dei *casi possibili* e quello dei *casi favorevoli* ad un certo evento E, la probabilità di E può essere calcolata in base alla seguente definizione.

Definizione 1.2.1. Si definisce ***probabilità di un evento*** E, indicata con $P(E)$, il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di E ed il numero dei casi possibili ovvero

$$P(E) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}}. \tag{1.1}$$

Illustriamo il concetto appena introdotto tramite alcuni esempi.

Esempio 1.2.1. Nel lancio di una moneta ci sono due casi possibili. L'evento T:*"esce testa"* ha un solo caso favorevole, pertanto

$$P(T) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}} = \frac{1}{2}.$$

Esempio 1.2.2. Nel lancio di un dado ci sono sei casi possibili. L'evento E:*"esce un multiplo di* 3*"* ha due casi favorevoli, pertanto

$$P(E) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 1.2.3. Se si estrae una carta da un mazzo di quaranta carte, i casi possibili sono quaranta. L'evento E :*"viene estratto un asso"* ha quattro casi favorevoli. Pertanto

$$P(E) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}.$$

Esempio 1.2.4. Se si estrae una pallina da un'urna che ne contiene dieci numerate da 1 a 10, i casi possibili sono dieci. Poiché i numeri primi presenti nell'urna sono 2, 3, 5, 7, l'evento E:*"viene estratto un numero primo"* ha quattro casi favorevoli. Pertanto

$$P(E) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Esempio 1.2.5. Si deve estrarre una pallina da un'urna che ne contiene dieci: cinque rosse, tre nere e due bianche. Supponiamo che, fra gli eventi che si possono verificare, si preveda l'evento E:*"estrarre una pallina nera"*. Essendo tre le palline nere presenti nell'urna allora l'evento E previsto ha tre casi favorevoli, mentre abbiamo già visto precedentemente che il numero di casi possibili è dieci. Pertanto,

$$P(E) = \frac{n^\circ \ \mathit{casi\ favorevoli}}{n^\circ \ \mathit{casi\ possibili}} = \frac{3}{10}.$$

Esempio 1.2.6. Si lanciano due dadi. Supponiamo che, fra i molti risultati che si possono verificare, si scommetta di ottenere cinque punti cioè che si verifichi l'evento E: *"ottenere cinque punti dai due dadi"*. Essendo quattro le coppie la cui somma è 5 allora l'evento atteso E ha quattro casi favorevoli, mentre i casi possibili sono trentasei. Pertanto,

$$P(E) = \frac{n^\circ \ casi\,favorevoli}{n^\circ \ casi\,possibili} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Esempio 1.2.7. Si lanciano 3 monete. Il numero di teste ottenuto dal lancio assume necessariamente uno di questi quattro valori: 0, 1, 2, 3. Sarebbe però un grave errore ritenere questi ultimi come casi possibili. Immaginiamo, infatti, di lanciare una moneta per tre volte anziché le tre monete. È facile capire che l'esito con due volte testa è atteso con più fiducia rispetto all'esito con tre volte testa. Infatti, per il primo ci sono le tre possibilità TTC, TCT, CTT mentre per il secondo c'è solo TTT. Pertanto, questi quattro esiti non sono ugualmente attesi e allora non li possiamo considerare dei casi. Ad essere ugualmente attesi sono, invece, gli otto esiti CCC, CCT, CTC, TCC, CTT, TCT, TTC, TTT e pertanto i casi possibili sono 8. Ora, supponiamo che, fra gli eventi che si possono verificare, si preveda l'evento E: *"ottenere una testa e due croci"*. E possiede 3 casi favorevoli e, pertanto, si ottiene

$$P(E) = \frac{n^\circ \ casi\,favorevoli}{n^\circ \ casi\,possibili} = \frac{3}{8}.$$

Osservazione 1.2.2. Per quanto appena considerato, il lancio di tre monete va visto come si trattasse di tre lanci di una moneta. *In generale, il lancio di N monete è equivalente al lancio di una moneta ripetuto N volte.*

Finora abbiamo considerato situazioni semplici in cui, di conseguenza, è stato facile calcolare la probabilità di un evento perché i casi possibili e quelli favorevoli erano facilmente individuabili. Ci sono però molte situazioni in cui il calcolo della probabilità di un evento non è affatto semplice, anzi, talvolta è molto difficile.

Presentiamo, ora, alcuni esempi.

1. Calcolare la probabilità che, lanciando tre volte un dado, si ottengano tre numeri consecutivi.

2. Calcolare la probabilità che, estraendo tre carte da un mazzo da quaranta, esse siano dello stesso valore.
3. Data un'urna contenente cinque palline rosse, tre nere e due bianche, calcolare la probabilità che, estraendo tre palline dall'urna, risultino una per colore.
4. Calcolare la probabilità che, lanciando dieci volte una moneta, si ottenga almeno due volte testa.

Per riuscire a risolvere problemi di questo tipo è necessario ampliare l'ambito delle conoscenze ed apprendere delle procedure di calcolo particolari entrando in una branca del Calcolo delle probabilità conosciuta come *Calcolo combinatorio*.