

14 gennaio 2026

Dimostrazioni senza parole

Io nel pensier mi fingo

Claudio Bernardi, Lorenzo Mazza, Elena Petterlini

Una dimostrazione senza parole è costituita solo da una figura, che sostituisce il ragionamento.

Le dimostrazioni senza parole nascono verso il 1975 (su alcune riviste, come *Mathematics Magazine*, erano talora usate per riempire uno spazio vuoto!).

Si diffondono negli anni '80 e '90 come scherzo, sfida, esercizio di stile. La figura è affiancata dall'enunciato e talvolta da una formula.



Tre libri di Roger Nelsen

Proofs Without Words (1993)

https://dn720001.ca.archive.org/0/items/proofs-without-words-roger-nelsen/Proofs%20without%20Words%20-%20Roger%20Nelsen_text.pdf

Proofs Without Words II (2000)

Proofs Without Words III (2017)

Vedremo vari esempi in aree diverse.

È accettabile una dimostrazione senza parole?

No La dimostrazione è un *oggetto linguistico*: si sviluppa con un ragionamento secondo regole logiche. Nelle dimostrazioni senza parole *manca* il ragionamento

Sì Anche una dimostrazione usuale non è completa: al lettore è richiesto di capire i dettagli.

Una dimostrazione scritta con tutti i passaggi, seguendo la definizione logica risulta troppo lunga, non leggibile.

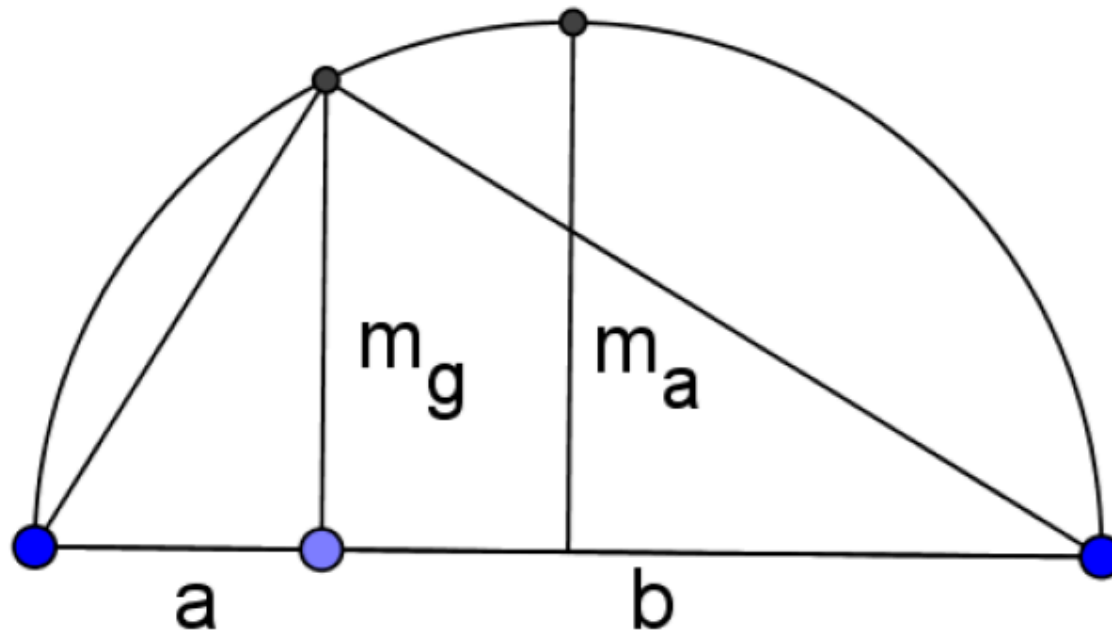
Confronto fra la media aritmetica m_a e la media geometrica m_g di due numeri positivi a, b

Per due numeri positivi, la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ è sempre maggiore o uguale alla media geometrica \sqrt{ab} , e vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \quad \Rightarrow$$

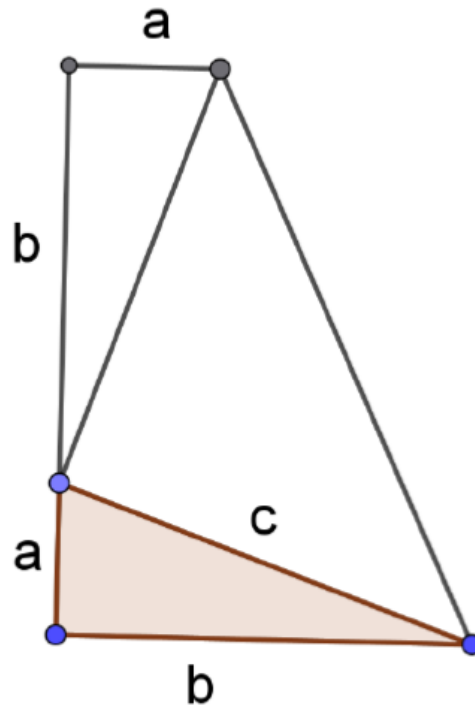
$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Disegniamo una semicirconferenza di diametro $a + b$



Teorema di Pitagora

Dimostrazione attribuita al presidente USA James Garfield (1876)



L'area del trapezio si può calcolare in due modi...

si costruiscono due copie identiche di un triangolo rettangolo, avente cateti lunghi a , b e ipotenusa c , e si dispongono come in figura, ottenendo un trapezio rettangolo formato dai due triangoli e da un triangolo rettangolo isoscele avente i cateti lunghi c ;

1) Si calcola l'area del trapezio sfruttando:

- la formula dell'area del trapezio: $\frac{(a+b)(a+b)}{2}$;
- La somma delle aree dei tre triangoli: $2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}c^2$;

2) Uguagliando le espressioni, si ottiene

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

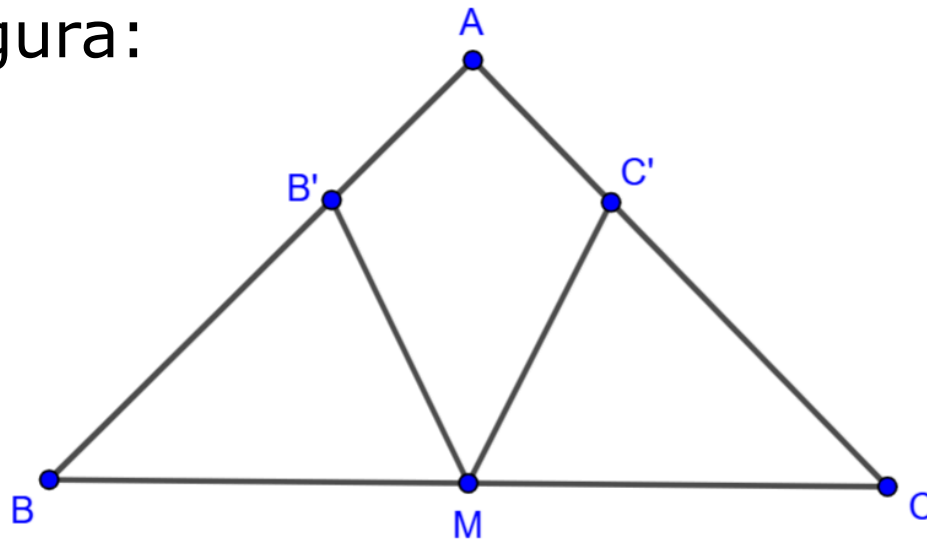
$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Un quesito tratto dagli esami di Stato

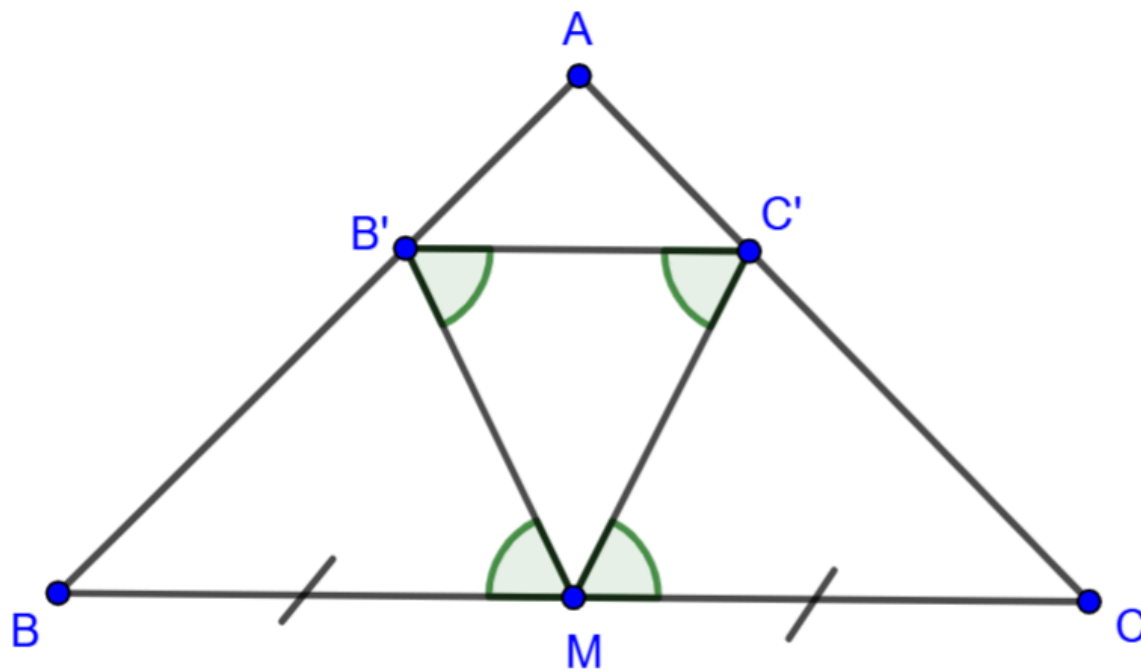
Dato un triangolo ABC , sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC , in modo tale che $AB' = \frac{1}{3} AB$ e $AC' = \frac{1}{3} AC$.

Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC .

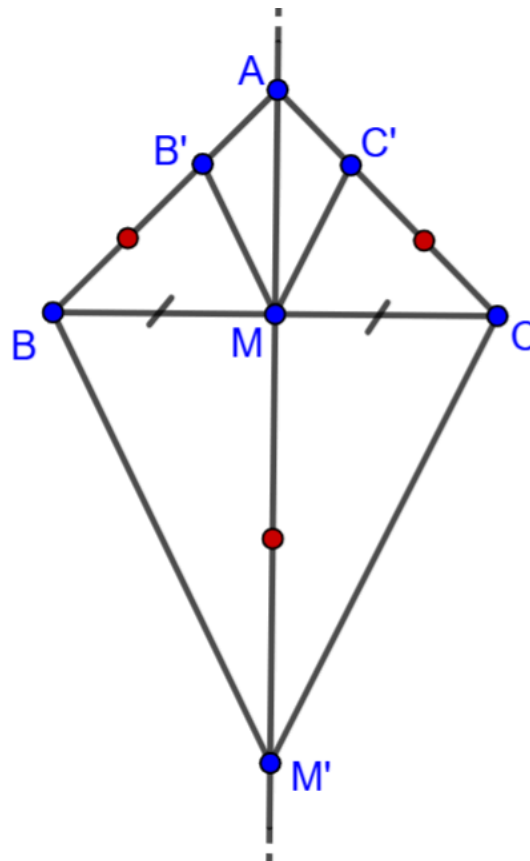
Facciamo una figura:



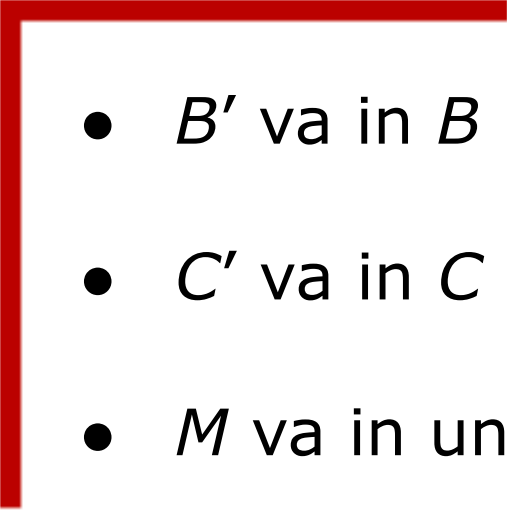
Dimostrazione 1 (senza parole):



Dimostrazione 2 (senza parole):



Applichiamo l'omotetia di centro A e rapporto 3

- 
- B' va in B
 - C' va in C
 - M va in un punto M' della retta AM
 - Se $MB' = MC'$, allora $M'B = M'C$ (l'omotetia conserva i rapporti)
 - Quindi A , M e M' appartengono all'asse di BC , da cui
 $AB = AC$

Le parole delle dimostrazioni

Dimostrazione

- *monstrum*
- *moneo*



Parola

- evoluzione del tardo latino del termine ***parabōla***
- latino popolare ****paraula***, con spostamento di significato da *parabola* a *discorso* o *parola*



Teorema e Teoria

θεωρέω, esaminare, osservare

teorema, la cosa esaminata

teoria, l'osservazione

teoria, da θεωρός, delegato; spettatore

θεάομαι, guardare, essere spettatore a teatro (θέατρον)

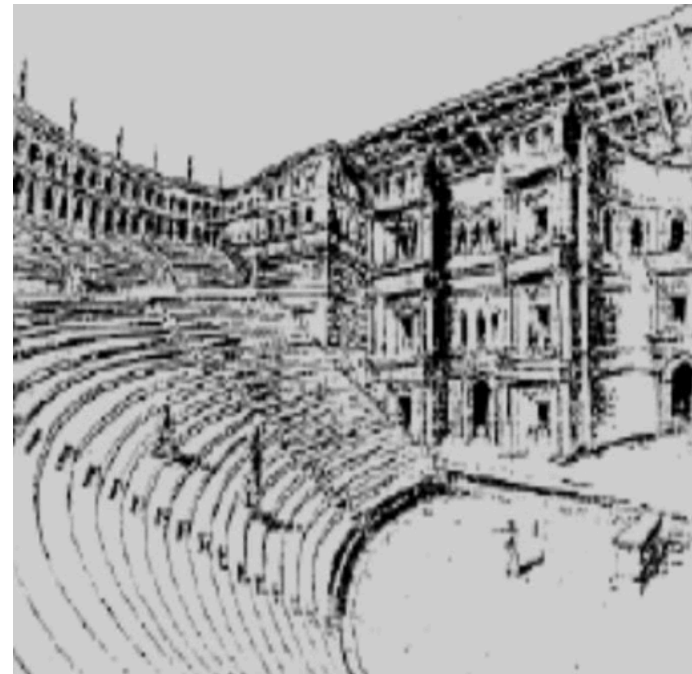
Imago vitae

- μίμεις, imitazione



Disegnare

- *designare*, rappresentare con segni



Figura

- ***fingere***, plasmare, modellare

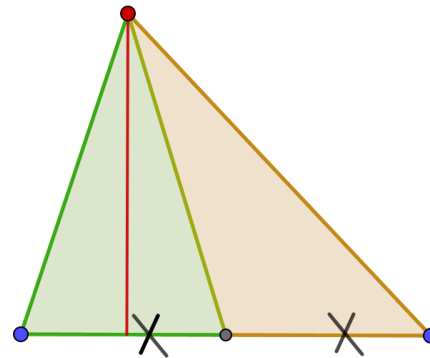


Sempre caro mi fu quest' ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
De l'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, l'interminato
Spazio di là da quella, e sovrumani
Silenzii, e profondissima quiete
Io nel pensier mi fingo, ove per poco
Il cor non si spaura.. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e il suon di lei. Così tra questa
~~Immensità~~^{Infinita} s'annega il pensier mio:
E il naufragar m'è dolce in questo mare.

Una dimostrazione senza parole per assurdo

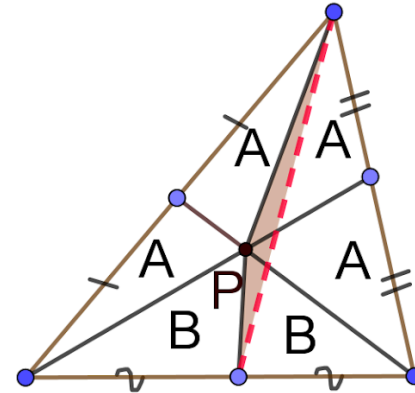
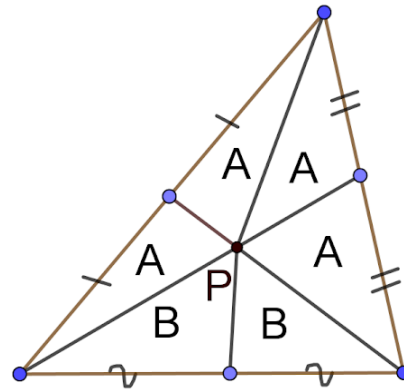
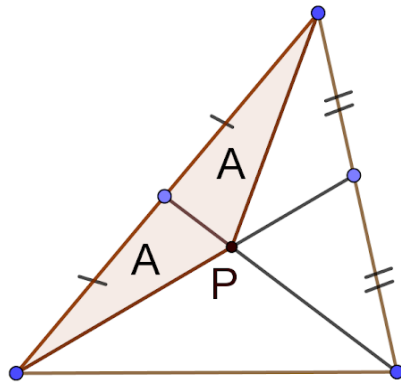
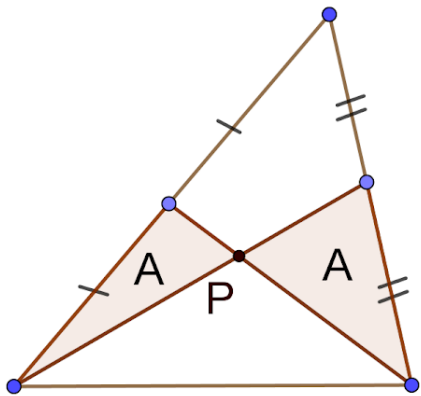
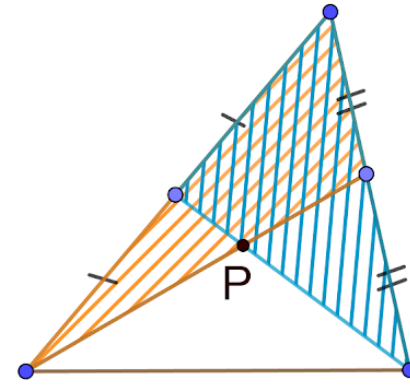
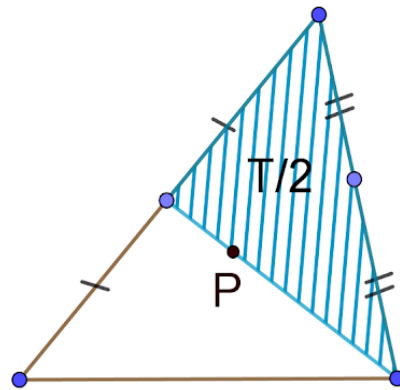
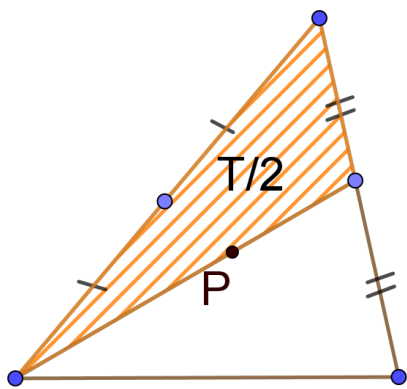
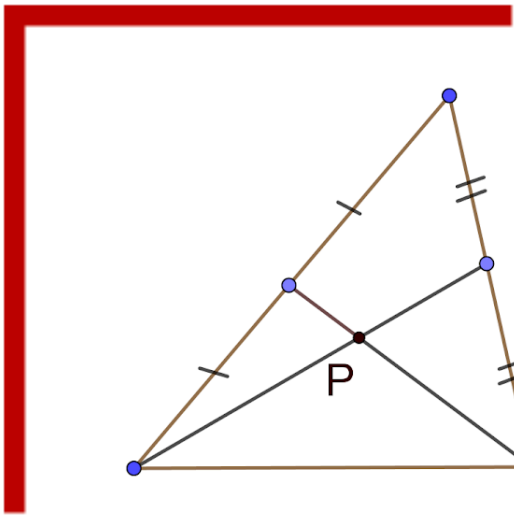
Lemma (che useremo 3-4 volte).

Una mediana di un triangolo lo divide in due parti di uguale area.



Teorema. *In un qualunque triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto.*

Dimostrazione per *assurdo senza parole*, ma con una sequenza di immagini (è accettabile? parliamone).



$$A + A + B + \text{triangolino} = A + A + B - \text{triangolino}$$

Assurdo!

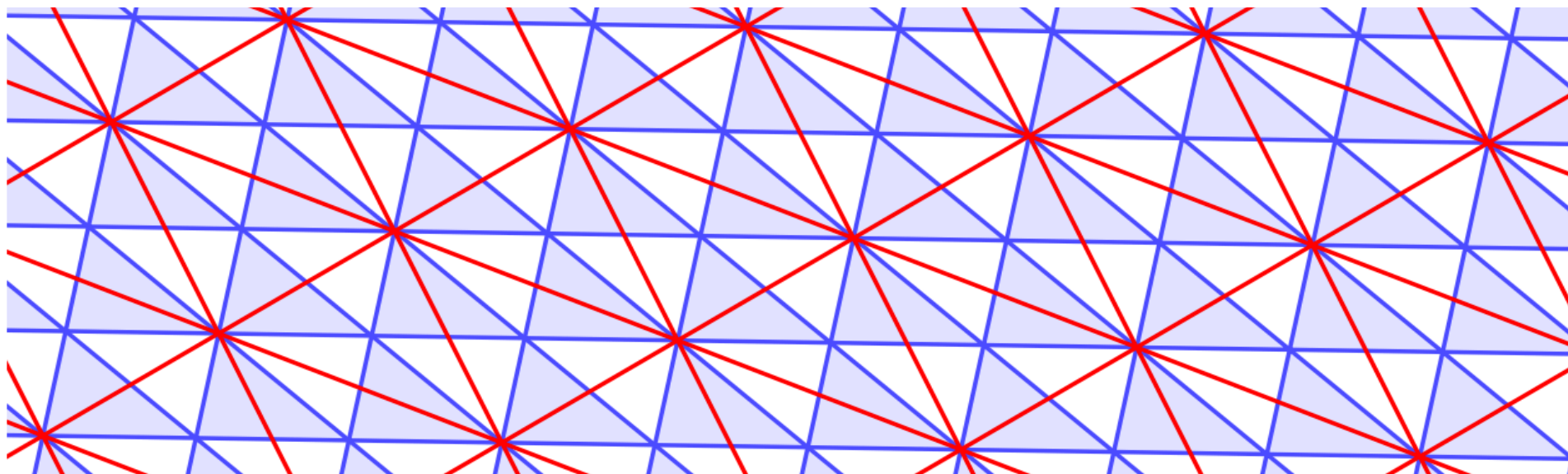
Per concludere, una *tassellazione senza parole* di Mariangela Chimetto (liceo Quadri di Vicenza)

È una dimostrazione spedita nei mesi scorsi nella lista *Mathnews*. Era stato posto il problema:

Sia ABC un triangolo. Si consideri il triangolo i cui lati sono le mediane di ABC. Dimostrare che il triangolo delle mediane è equivalente ai $\frac{3}{4}$ del triangolo ABC.

Si tassella il piano con copie del triangolo ABC (la tassellazione è formata dai *triangoli blu* e dai *triangoli bianchi*).

Ogni mediana scompone un triangolo in due parti equivalenti.



Le linee rosse sono mediane. Tutte le parti (i pezzetti) hanno uguale area. Il triangolo ABC contiene 2 parti; ogni triangolo rosso contiene 6 parti, cioè è il triplo di ABC . I lati di un triangolo rosso sono il doppio delle mediane. Quindi l'area del triangolo delle mediane è $1/4$ dell'area di un triangolo rosso, che è il triplo di ABC . Conclusione: il triangolo delle mediane equivale a $3/4$ di ABC .

Variante di Marcello Tarquini (liceo Pasteur di Roma)
Triangolo ABC . Il triangolo delle mediane è BDM , in giallo.

