14 gennaio 2026

La Logica inaspettata
dimostrare con lo sguardo

***Francesca* Ruzzi, *Silvia* Perini, *Antonio* Veredice**

Proposte didattiche per riflettere sulla validità delle dimostrazioni senza parole e sul senso del dimostrare.

Attività proposta in una classe II e in una classe IV del liceo classico-linguistico-matematico T. Lucrezio Caro.

- **Numeri figurati** (numeri triangolari e numeri quadrati)

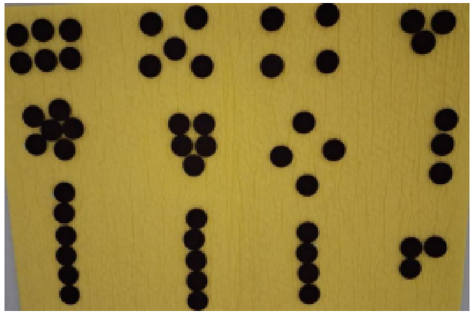
- **Somma dei numeri dispari** (principio di induzione nella classe IV)

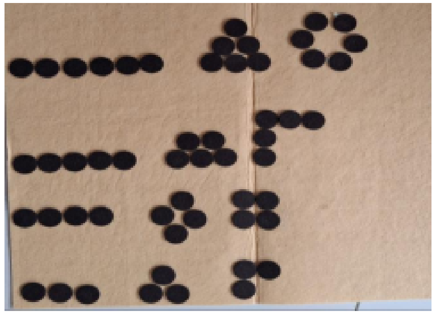
- **Somma di interi ed espressione algebrica dell' n-esimo triangolare**

- **Somme di interi** (crescenti e decrescenti)

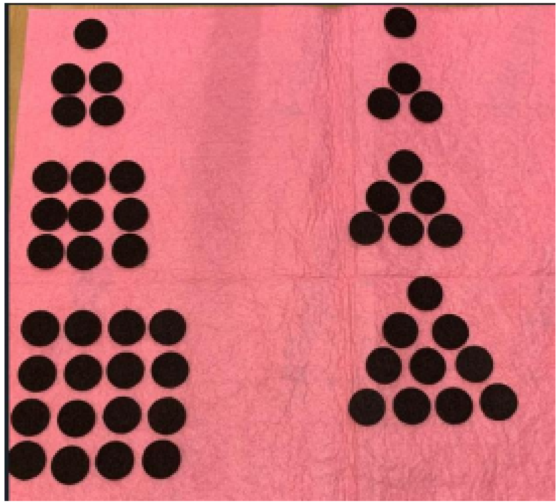
- **Somme di numeri triangolari**

Il numero genera la forma: *considera i numeri 3, 4, 5, 6 e per ciascuno di essi costruisci tre rappresentazioni utilizzando il materiale che ti è stato fornito.*

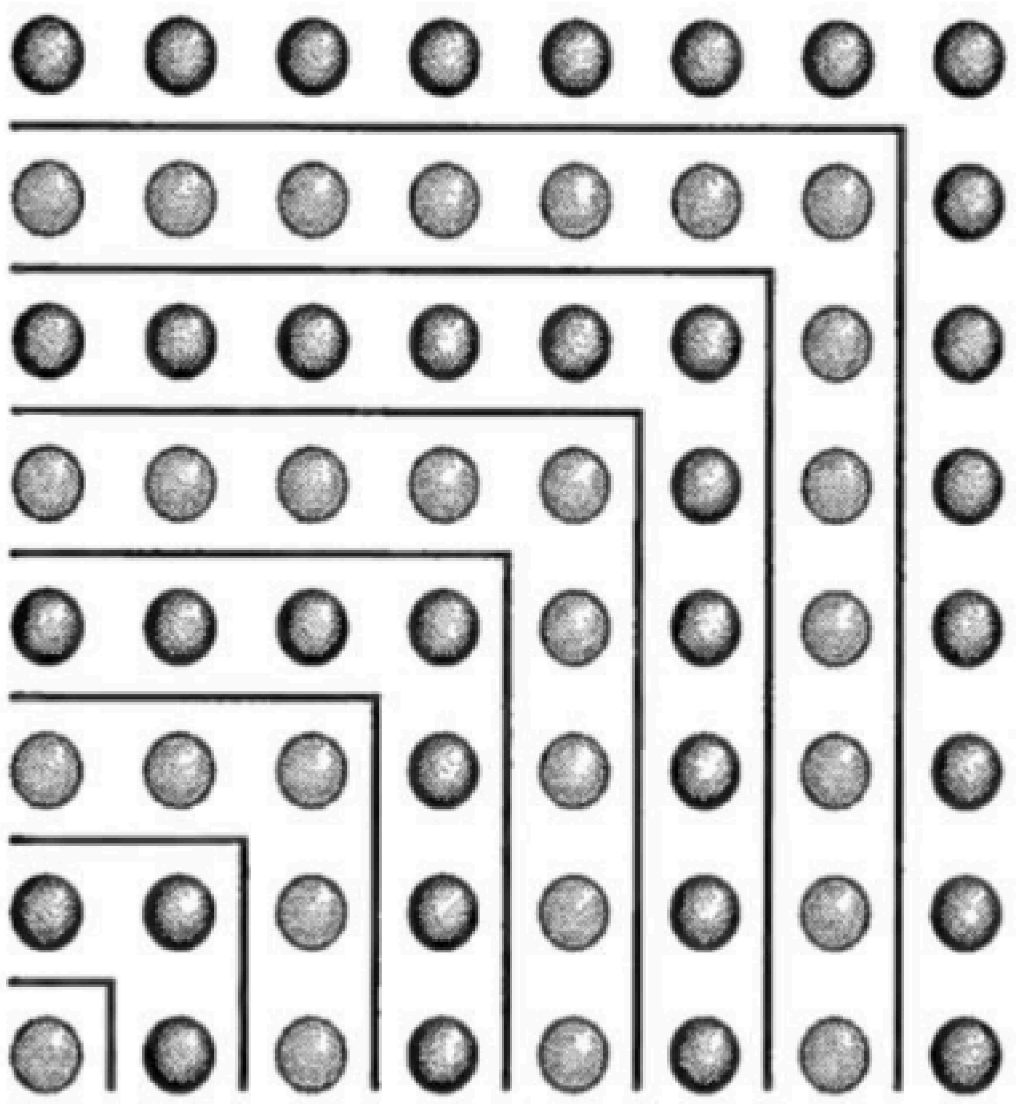




La forma genera il numero: *costruisci i primi cinque numeri quadrati e i primi cinque numeri triangolari a partire dal numero 1.*

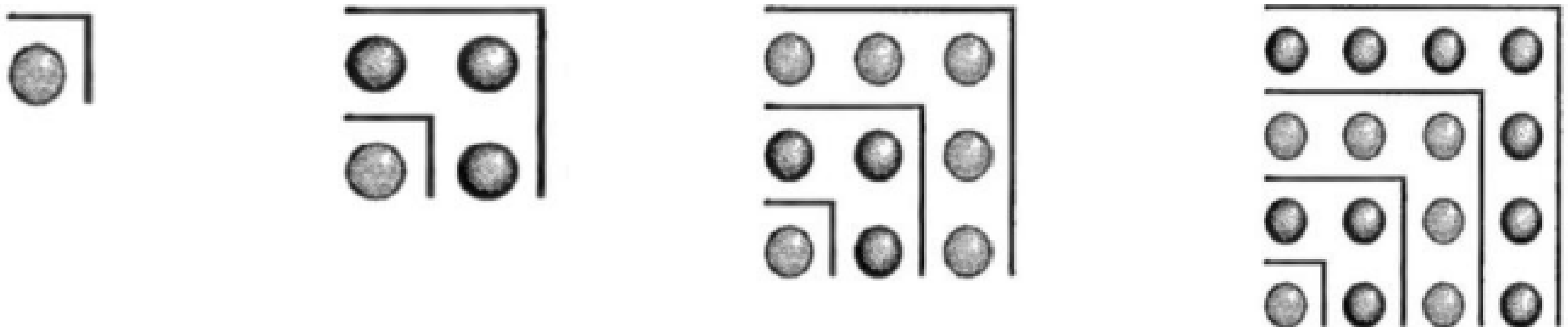


Osserva la figura.



Cosa puoi dedurre?

Ricostruisci la sequenza che la genera.



Formalizza.
Puoi affermare che la relazione individuata è vera per ogni valore di n?

➢ Principio di induzione

Gruppo 1:

osserva le seguenti relazioni e costruisci delle figure che possano dimostrarle

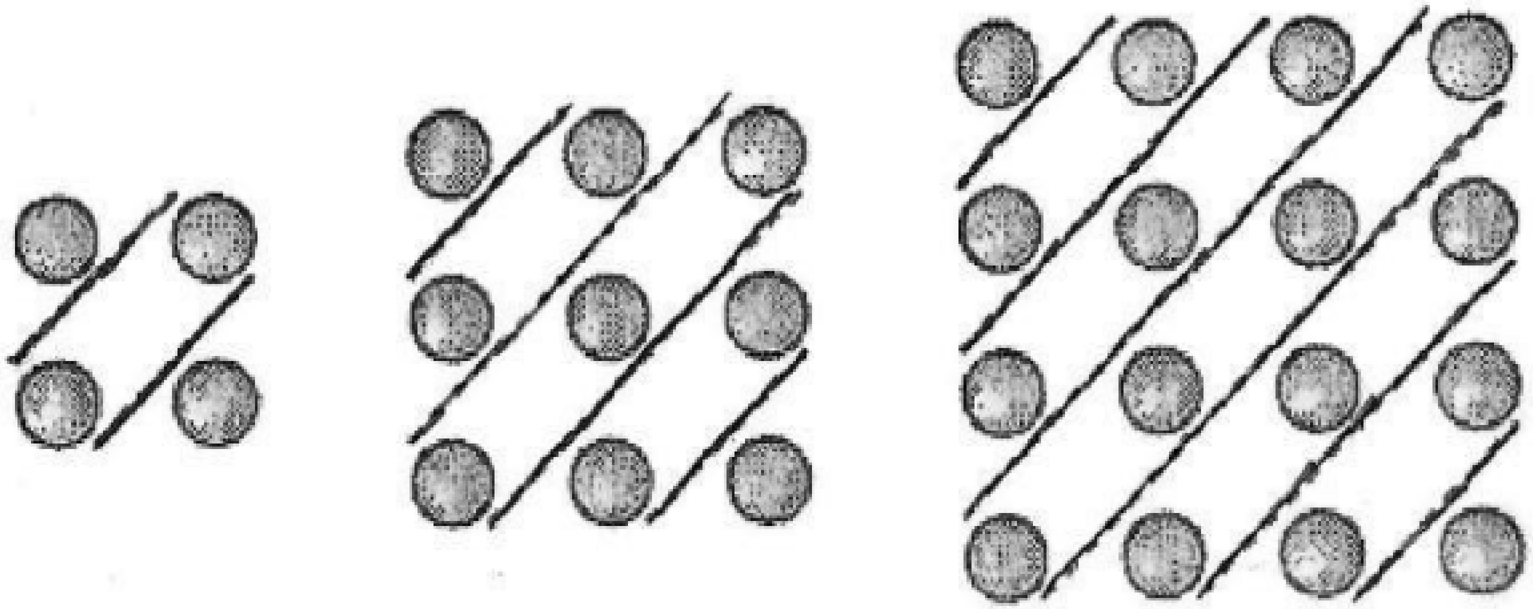
$$\mathbf{1+2+1=2^2}$$

$$\mathbf{1+2+3+2+1=3^2}$$

$$\mathbf{1+2+3+4+3+2+1=4^2}$$

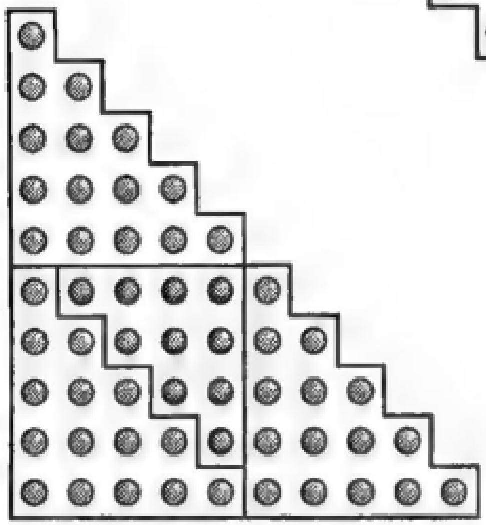
$$\mathbf{1+2+\cdots(\boldsymbol{n}-1)+\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}-1)+\cdots+1=\boldsymbol{n}^2}$$

Gruppo 2: osserva le figure seguenti e deduci la proprietà numerica da esse rappresentata

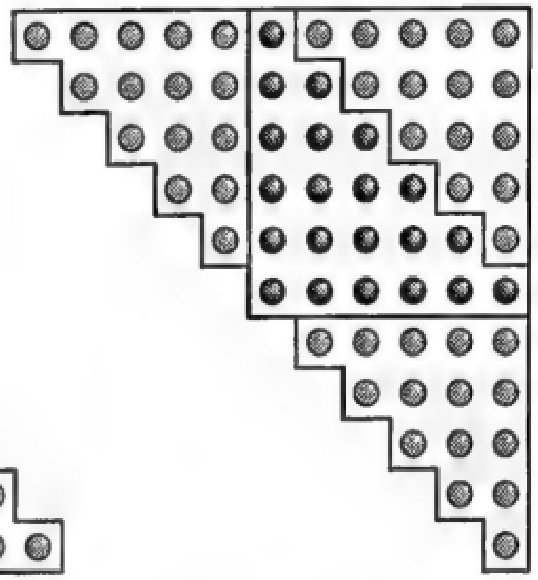


Numeri triangolari: spiega le seguenti dimostrazioni senza parole.

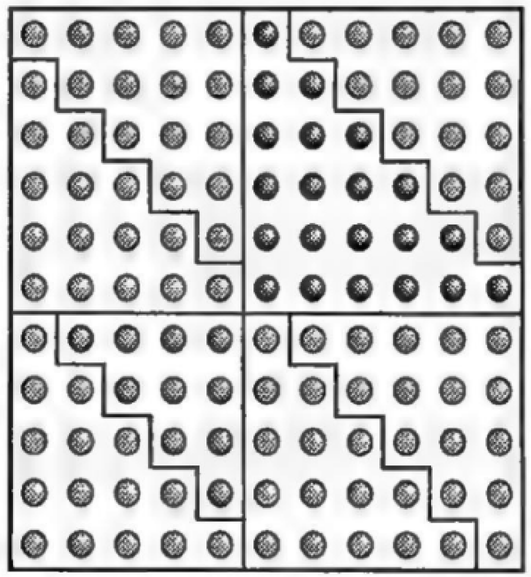
Quali elementi della figura sono stati importanti per la sua comprensione? Hai trovato facilmente la corrispondenza tra la figura e la relazione numerica? Come?



$3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$



$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$



$T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1} = (2n+1)^2$

Nella costruzione delle figure e nella comprensione delle dimostrazioni senza parole, quali **abilità** pensi di aver utilizzato maggiormente?

ragionamento logico

capacità di osservazione

In quale fase dell'attività hai trovato più **difficoltà**?

nel trovare il legame tra figura e relazione numerica

nel trascrivere a parole ciò che avevo capito

nella generalizzazione

Quali aspetti ti sono **piaciuti** di più?

vedere i numeri in modo diverso

è sempre matematica ma più divertente rispetto alle disequazioni

è un argomento più logico, meno nozionistico

Dimostrare senza parole…con il movimento

Attività proposta in una classe V del liceo scientifico-matematico "Giuseppe Peano" di Monterotondo

Domande-stimolo

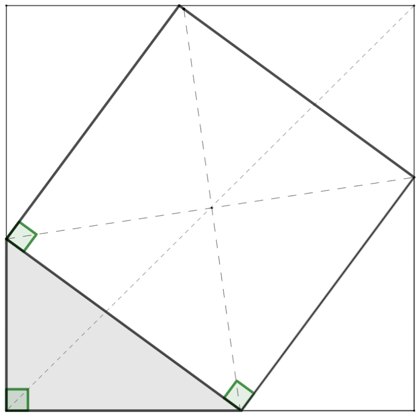
- Cosa significa *dimostrare* in matematica?
- Cosa accade quando togliamo le parole alla dimostrazione?
- Provate a comprendere la dimostrazione del seguente teorema che viene dimostrato senza l'uso di parole.

Teorema.

In un triangolo rettangolo, la bisettrice dell'angolo retto passa per il centro del quadrato costruito esternamente sull'ipotenusa.

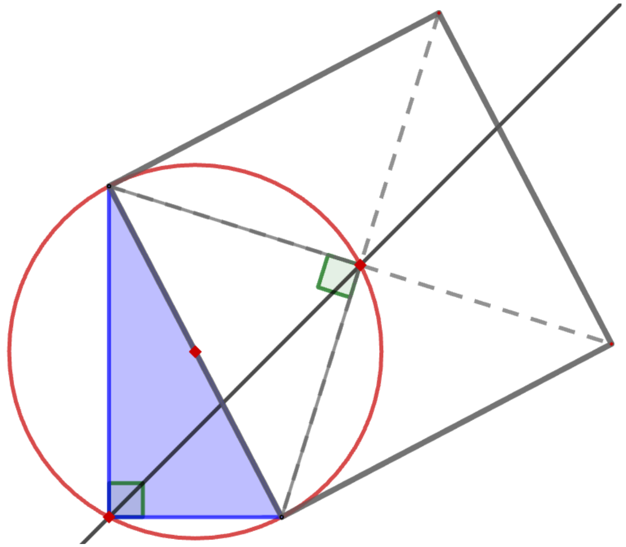
Silvia Perini

Prima dimostrazione *– per completamento della figura*



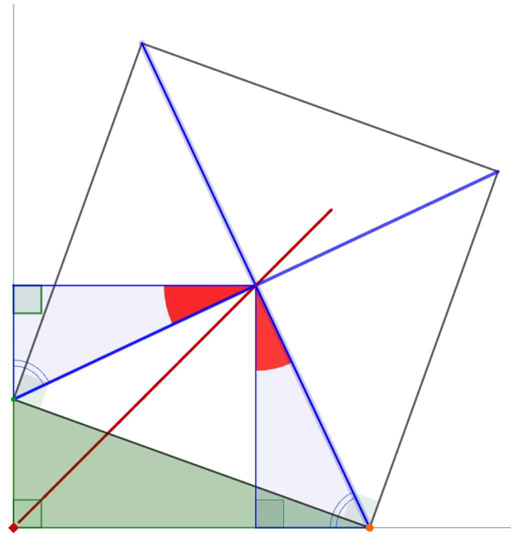
Osservazioni: È una dimostrazione che *mostra* — nel senso etimologico di *monstro* — la simmetria delle parti che compongono la figura, attraverso un completamento grafico che l’occhio coglie immediatamente. La percezione visiva guida il ragionamento e resta impressa nella memoria, perché si fonda su una forma semplice e armonica. È una dimostrazione facile da vedere, ma non altrettanto immediata da comprendere nella sua logica profonda.

Seconda dimostrazione *– con gli angoli retti inscritti in una circonferenza*



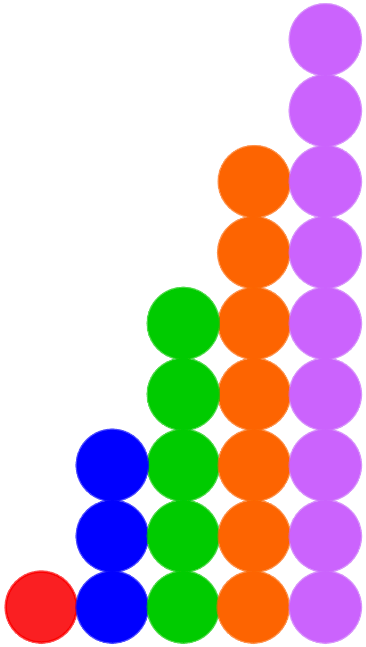
Osservazioni: In questa dimostrazione lo sguardo diventa più analitico: la figura, meno immediata della precedente, invita gli studenti a richiamare la teoria degli angoli e delle circonferenze e a costruire autonomamente le proprie deduzioni. È convincente per chi sa già *vedere* la geometria che si nasconde nei teoremi.

Terza dimostrazione-*immagini in movimento*.

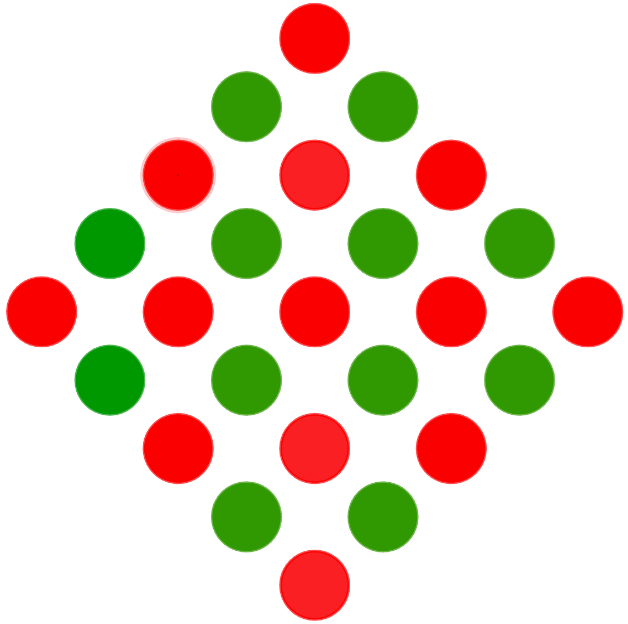


Osservazioni:La dimostrazione è guidata dal movimento senza parole, come "in un film muto" — magari con musica di sottofondo. Lo sguardo viene catturato dal movimento e le deduzioni logiche della dimostrazione si formano a poco a poco e con esse le parole

Integer Sums



[Sums of Odd Integers]



[Squares and Sums of Integers]

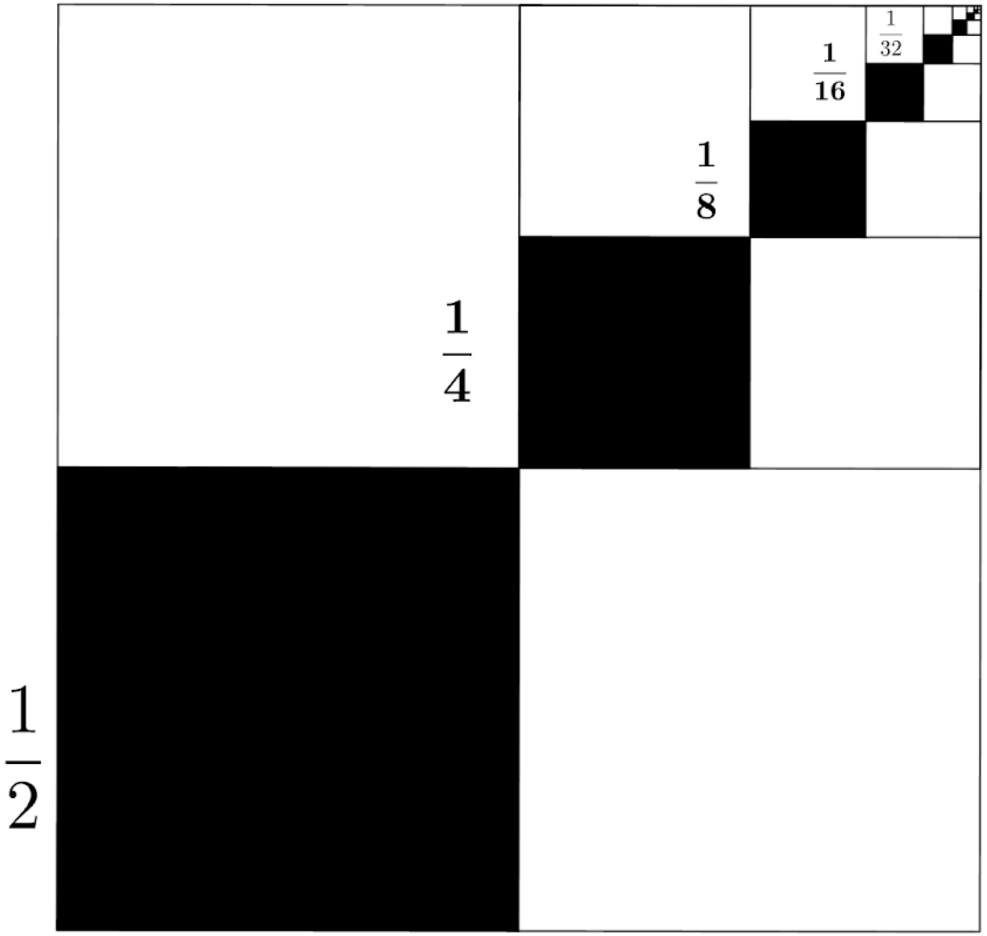
La discussione in classe

- Senza parole, la dimostrazione si semplifica?
- È più facile da ricordare?
- È più motivante?
- Il processo dimostrativo diventa più critico?

Conclusioni

- Stimola l'intuizione visiva e la dinamica della figura.
- Favorisce ragionamento autonomo e critico.
- Non elimina il linguaggio verbale, lo ritarda.
- Cambiando il codice comunicativo cambiano percezione, attenzione e coinvolgimento

Una somma infinita... senza parole



Antonio Veredice

Dimostrazione Algebrica

Dato che

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

moltiplicando per 4 otteniamo

$$4S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

ovvero
(*attenzione a questo passaggio*)

$$4S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = 1 + S$$

quindi risolviamo
l'equazione per trovare S

$$4S = 1 + S \qquad 3S = 1 \qquad S = \frac{1}{3}$$

Domande agli studenti

DOMANDA 1 Quale delle due dimostrazioni appena proposte ti sembra più convincente? Motiva la risposta.

DOMANDA 2 Quale delle due dimostrazioni hai compreso meglio? Quale ti ha fatto comprendere meglio il teorema? Perché?

DOMANDA 3 Se il tuo insegnante ti chiedesse di dimostrare questo risultato, quale delle due dimostrazioni gli proporresti? Perché?

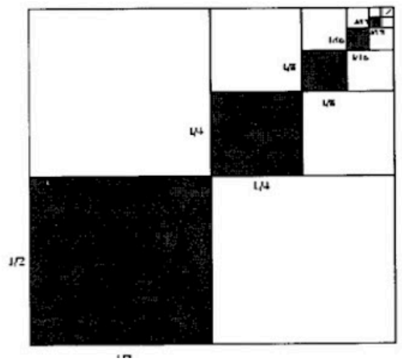
Risposte degli studenti

DOMANDA 1: Quale delle due dimostrazioni appena proposte ti sembra più convincente? Motiva la risposta.

La dimostrazione algebrica	49 studenti
La dimostrazione senza parole	14 studenti
Entrambe	1 studenti

*Quella algebrica perché si basa su principi matematici ed è “**oggettiva**” mentre l’immagine potrebbe essere **fraintesa**.*

*L'immagine è più intuitiva ma per **dimostrare "seriamente"** il teorema sarebbe meglio la dimostrazione algebrica.*



DOMANDA 2: Quale delle due dimostrazioni hai compreso meglio? Quale ti ha fatto comprendere meglio il teorema?

La dimostrazione algebrica	45 studenti
La dimostrazione senza parole	17 studenti
Entrambe	2 studenti

*Una dimostrazione algebrica risulta più comprensibile perché si presenta in modo più semplice e **meccanico**.*

Certo quella più coinvolgente è quella visiva, perché secondo me uno schema o una immagine rimane più impressa, ma serve comunque una spiegazione algebrica.

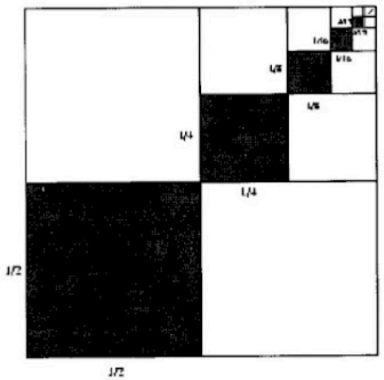
Quella algebrica perché spiegando ogni passaggio è stato più Semplice.

DOMANDA 3: Se il tuo insegnante ti chiedesse di dimostrare questo risultato, quale delle due dimostrazioni gli proporresti? Perché?

La dimostrazione algebrica	49 studenti
La dimostrazione senza parole	12 studenti
Entrambe	2 studenti

La dimostrazione algebrica perché è più semplice da spiegare e riprodurre.

Per me è più facile capire attraverso quella grafica ma spiegare quella algebrica.



La dimostrazione algebrica è più facile da ***memorizzare*** *e ricostruire.*

La dimostrazione algebrica è più affidabile?

Consideriamo ora la somma $S' = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots$

Secondo te questa somma può avere valore finito come la precedente? Osserva il seguente ragionamento (simile a quello della precedente dimostrazione algebrica.

Dividiamo per 4 e otteniamo $\frac{S'}{4} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots$

Ovvero $\frac{S'}{4} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots = 1 + S'$

Quindi risolviamo l'equazione per ottenere S'

$$\frac{S'}{4} = 1 + S' \qquad \frac{S'}{4} - S' = 1 \qquad -\frac{3}{4}S' = 1 \qquad S' = -\frac{4}{3}$$

La dimostrazione algebrica è più affidabile?

$$S' = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots$$

$$\frac{S'}{4} = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \cdots = 1 + S'$$

$$\frac{S'}{4} = 1 + S' \qquad \frac{S'}{4} - S' = 1$$

$$-\frac{3}{4}S' = 1 \qquad S' = -\frac{4}{3}$$

DOMANDA 4: Cosa pensi del ragionamento precedente? Ti sembra corretto? Motiva la risposta

Non sempre una giustificazione con passaggi è corretta.

*Mi sembra corretto dal punto di vista **algebrico** ma non dal punto di vista **logico**.*

Per pochissimi (3 studenti) la domanda sulla serie di potenze di 4 è un'occasione per riflettere in maniera critica sulle altre domande mettendo in discussione i punti di vista prima espressi.