Webinar "We Math 2026" - Scienza Express

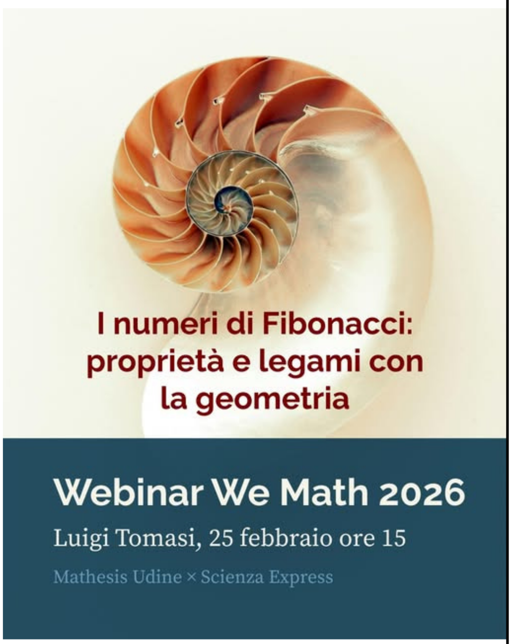
I numeri di Fibonacci.
Proprietà e legami con la geometria

25 febbraio 2026

Luigi Tomasi
Centro Ricerche Didattiche «U. Morin»
luigi.tomasi@unife.it

PRIMO INCONTRO WE MATH 2026

- I numeri di Fibonacci costituiscono uno degli argomenti più interessanti della matematica, nei quali è possibile collegare aritmetica, algebra, geometria e applicazioni nel mondo reale. In questo webinar, di carattere divulgativo e didattico, rivolto sia a docenti che studenti, verrà introdotta la successione di Fibonacci a partire dalla sua definizione ricorsiva, per poi esplorarne alcune proprietà fondamentali: le relazioni tra i termini, la formula di Binet e i collegamenti con il rapporto aureo.
- Mercoledì **25 febbraio 2026**, dalle 15:00 alle 16:00.
- Relatore: Luigi Tomasi (Centro Ric. Didattiche U. Morin)
- Moderatore: Salvatore Damantino (Mathesis Udine)
- Link per partecipare: **https://meet.google.com/xet-avcc-mrr**



2

Sommario

I numeri di Fibonacci costituiscono un argomento particolarmente interessante della matematica, nel quale è possibile collegare aritmetica, algebra, geometria e applicazioni nel mondo reale.

In questo webinar, di carattere divulgativo e didattico, rivolto sia a insegnanti che a studenti, verrà introdotta la successione di Fibonacci a partire dalla sua definizione ricorsiva, per poi esplorarne alcune proprietà fondamentali: relazioni tra i termini, la formula di Binet e i collegamenti con il rapporto aureo.

3

Leonardo Pisano, detto «Fibonacci»
ossia *fi(lius)Bonacci*
(Pisa, 1170 ca. – Pisa, 1242 ca.)

4

Leonardo Pisano, detto **Fibonacci**
(Pisa, 1170 circa – Pisa, 1242 circa)

- È considerato il più grande matematico del Medioevo.
- Contribuì in modo decisivo alla rinascita della Matematica dopo la decadenza dell'età tardo-antica e dell'Alto Medioevo.
- Con Fibonacci, in Europa, ci fu l'unione fra gli strumenti matematici di calcolo elaborati dalla scienza indo-araba e i procedimenti della geometria greca euclidea (gli *Elementi* di Euclide).

5

2020: francobollo commemorativo- a 850 anni dalla nascita di Fibonacci

6

La repubblica marinara di Pisa attorno al 1200

- Attorno al **1200**, Pisa vive l'apice del suo splendore come **Repubblica Marinara**, dominando le rotte commerciali del Mediterraneo e consolidando un impero che includeva territori in Sardegna, Corsica e numerosi empori in Oriente.
- **Potenza Politica e Marittima. Dominio sul Mediterraneo:** Grazie alla partecipazione alle Crociate, i mercanti pisani ottennero privilegi commerciali immensi in città come Costantinopoli, Acri e Alessandria. In questo periodo, Pisa è la principale alleata dell'Impero nel Tirreno, mantenendo una ferma posizione **ghibellina**.

7

Il padre di Fibonacci decide di portarlo (a 16 o 17 anni) con sé a Bùgia (attuale Algeria) per imparare il calcolo aritmetico del mondo arabo

Questa immagine, e in generale la maggior parte dei ritratti di Leonardo Pisano (detto Fibonacci), **non risale alla sua epoca (XII-XIII secolo)**, poiché non esistono raffigurazioni a lui contemporanee.
Il ritratto più diffuso, come quello qui a fianco, è un'opera artistica successiva, un'**incisione del XIX secolo**.
Si stima che questa particolare rappresentazione sia stata creata intorno al **1850**, derivando da illustrazioni pubblicate in opere come *I benefattori dell'umanità* (Volume VI, Firenze, 1850).

8

Bùgia (oggi: Béjaïa, Algeria)

Leonardo Pisano, detto Fibonacci
Fi(lius) Bonacci: la nuova Aritmetica e l'Algebra arrivano in Italia

- Leonardo non rimase soltanto a Bùgia, ma viaggiò in tutto il Mediterraneo: Egitto, Siria, Grecia, Costantinopoli, Sicilia, Provenza,… ovunque i pisani avessero commerci e affari.
- Al ritorno dal suo lungo viaggio, nel 1202, scrisse un famoso libro, la sua grande opera sull'aritmetica e l'algebra in latino, intitolato *Liber Abbaci* (ossia, il *Libro del* ***calcolo***).
- Fibonacci descrive il suo viaggio e i suoi studi nel Capitolo I, paragrafo 3, del *Liber Abbaci*

10

Leonardo Pisano, detto Fibonacci
Liber Abbaci, Prologo: note autobiografiche

- *Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bùgia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano,* ***mi fece andare da lui****, durante la mia fanciullezza,* ***valutando l'utilità e il vantaggio futuro,*** *e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco.*
- *Qui, introdotto nell'arte da* ***uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure [cifre] degli Indiani*** *mi piacque sopra ogni altra cosa, la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai, con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute, qualunque cosa si studiasse di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi, luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari.*

11

Leonardo Pisano, detto Fibonacci
Liber Abbaci, Prologo: note autobiografiche

- *Quindi abbracciando in modo più stretto il metodo stesso degli Indiani e studiandolo più attentamente, aggiungendo in esso alcuni concetti in senso più specifico e inserendo anche alcune delle sottigliezze della* ***geometria di Euclide****,*
- *mi sono sforzato di comporre la totalità di questo libro, distinta in quindici capitoli, nel modo più comprensibile possibile…*

12

Leonardo Pisano, detto Fibonacci
Liber Abbaci, Prologo: note autobiografiche

- *dimostrando quasi tutto ciò che ho inserito con prove certe, affinché possano essere istruiti in questa scienza,* ***con un metodo perfetto al di sopra di tutti gli altri****, coloro che lo desiderano, e* ***la gente latina*** *d'altra parte, come accaduto finora, non vi si trovi del tutto esclusa.*
- *Se per caso ho inserito qualcosa meno o più del giusto o del necessario, vi prego di essere indulgenti con me, poiché non vi è alcuno che sia privo di difetti e che sia cauto in tutto sotto ogni aspetto.*

13

Leonardo Pisano, detto Fibonacci:
la nuova Aritmetica arriva in Italia (e in Europa); il *Liber abbaci* (1202)

Il titolo dell'opera non si si deve tradurre con «Libro dell'abaco», perché sarebbe una traduzione scorretta, ma

Liber abbaci **=** «Libro del calcolo»

(sottinteso, «aritmetico e algebrico»).

Questo perché l'opera di Leonardo Pisano tendeva proprio a mostrare come fare i calcoli aritmetici in modo rapido ed efficiente senza il bisogno di ricorrere a uno strumento fisico come l'abaco.

14

Il *Liber abbaci* (1202), una ricchissima miscellanea di matematica

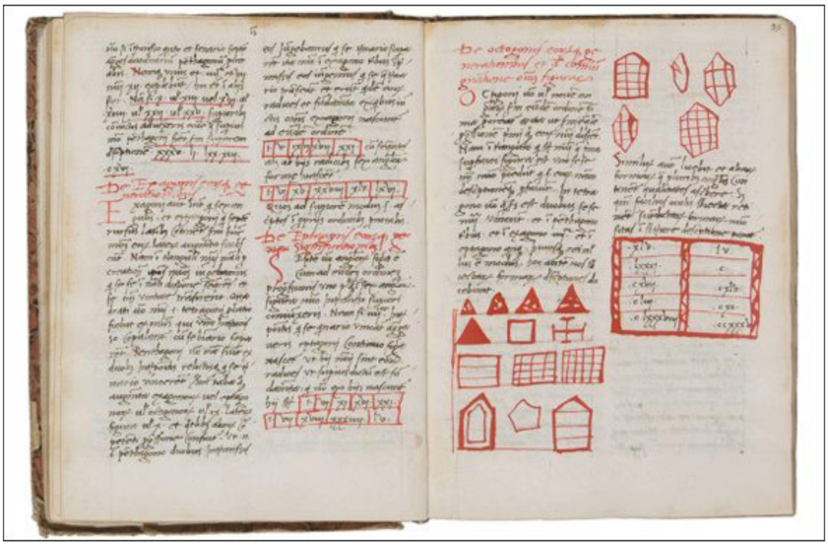
L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie commerciali, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione logico-deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci.

L'opera nel suo complesso si può considerare un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwārizmi (c. 780 - c. 950), ma si tratta di un'opera molto approfondita.

15

Pagine (manoscritte, su pergamena) del *Liber Abbaci* (1202), di Leonardo Pisano



16

Fibonacci porta in Italia il sistema di numerazione indo-arabo.

Presenta questo sistema nel I capitolo del suo libro (di più di 600 pagine), il *Liber Abbaci*, nel 1202

17

Inizio del *Liber Abbaci* di Fibonacci
Capitolo 1: le cifre e il simbolo per lo zero

Fibonacci, all'inizio del *Liber Abbaci*, scrive:

- «*Le nove figure degli Indiani sono queste*

  9 8 7 6 5 4 3 2 1

- *Con tali nove simboli e con il segno* 0, *che gli Arabi chiamano zefiro* [*sifr*], *si scrive qualunque numero, come sarà mostrato più avanti.*
- *Infatti il numero è una raccolta fatta di unità o un insieme di unità, che per le sue posizioni sale all'infinito.*»

18

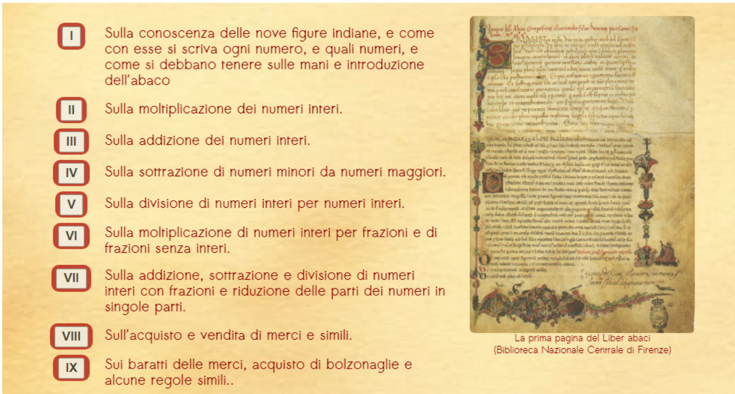
Il *Liber abbaci* www.progettofibonacci.it/
Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana a cura di Laura Catastini e Franco Ghione

Libro monumentale, suddiviso in 15 capitoli.

Tradotto in italiano solo di recente (2021).

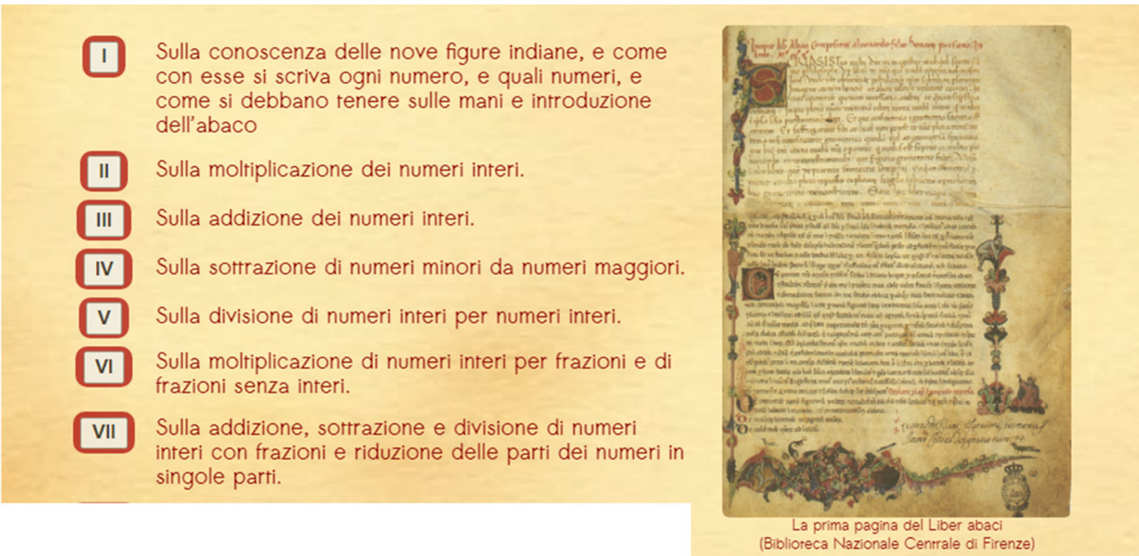
Per questa traduzione vedere l'indice:

www.progettofibonacci.it/libab_indice.html



19

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber Abbaci*: www.progettofibonacci.it/



20

Indice del **Liber Abbaci** (in 15 capitoli): i primi sette capitoli

- I primi sette capitoli sono interamente dedicati all'esposizione della **nuova aritmetica**: viene presentata la **scrittura posizionale** dei numeri naturali, anche molto grandi, con l'uso delle parole e delle cifre indo-arabiche
- Si prosegue con il calcolo con i **numeri «rotti»,** ossia con le frazioni (cap. VI e cap. VII).

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber abaci* www.progettofibonacci.it/ capitoli «applicativi»

VIII	Sull'acquisto e vendita di merci e simili.
IX	Sui baratti delle merci, acquisto di bolzonaglie e alcune regole simili..
X	Sulle società fatte fra consoci.
XI	Sulla fusione di monete e delle loro regole, pertinenti alla fusione.

22

Sito «Progetto Fibonacci» con la traduzione italiana del *Liber abaci* www.progettofibonacci.it/

ultimi 4 cap.: si risolvono problemi usando anche l'algebra

XII Sulla soluzione di questioni di varia natura dette erratiche.

XIII Sulla regola della doppia falsa posizione, come per essa si possano risolvere quasi tutte le varie questioni erratiche.

XIV Sulla determinazione delle radici quadrate e cubiche e la moltiplicazione e divisione e somma e estrazione di queste radici tra di loro e dei recisi e delle loro radici.

XV Sulle regole e proporzioni pertinenti alla geometria: questioni di algebra e almuchabala.

Il problema proposto da Fibonacci

Liber Abbaci – Problema Cap. XII.7.30
Il celebre problema delle coppie di conigli

XII Sulla soluzione di questioni di varia natura dette erratiche.

«Un tale mise una coppia di conigli in un posto, che era circondato dappertutto da un muro, per sapere quante paia sarebbero nate in un anno, essendo nella loro natura di partorire ogni mese un'altra coppia, e partoriscono nel secondo mese dalla loro nascita.»

Fibonacci ci dà la soluzione...

25

Liber Abbaci – Problema Cap. XII.7.30
Il problema delle coppie di conigli: soluzione

"Poiché la coppia sopra citata partorisce nel primo mese, la raddoppierai, saranno **2 coppie in un mese**.
Una di queste, cioè la prima, genera nel **secondo** mese, e così **nel secondo mese ci sono 3 coppie**; due delle quali in un mese sono ingravidate;
e nel **terzo** mese sono generate 2 coppie di conigli, e così ci **sono 5 coppie nello stesso mese**; delle quali in quel mese si ingravidano 3 coppie;
e nel **quarto** mese sono **8 coppie**; 5 coppie di queste generano altre 5 coppie: che sommate con 8 coppie fanno 13 coppie nel **quinto** mese;…".

26

Cap. XII.7.30 - *«Quante paia di conigli sono generati in un anno da una coppia sola?»*

All'inizio dell'anno: 1 coppia (feconda)

Fine del primo mese: 2 coppie (una feconda, l'altra neonata)

Fine del secondo mese: 3 coppie (due feconde, una neonata)

Fine del terzo mese: 5 coppie (tre feconde, due neonate)

Fine del quarto mese: 8 coppie (cinque feconde, tre neonate)

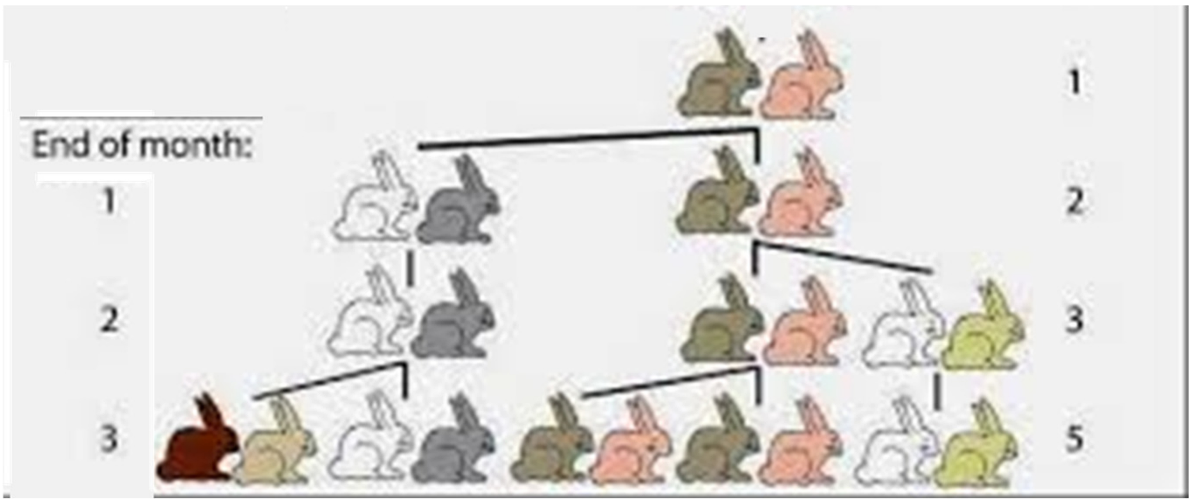
Fine del quinto mese: 13 coppie (otto feconde, cinque neonate)

....

e così via, fino a **377 coppie** alla fine dell'anno (vedi a fianco la soluzione di Fibonacci).

coppia
1
primo
2
secondo
3
terzo
5
quarto
8
quinto
13
sesto
21
settimo
34
ottavo
55
nono
89
decimo
144
undicesimo
233
dodicesimo
377

Cap. XII.7.30 - *«Quante paia di conigli sono generati in un anno da una coppia sola?»*



28

La successione di Fibonacci: alcune proprietà

I numeri di Fibonacci

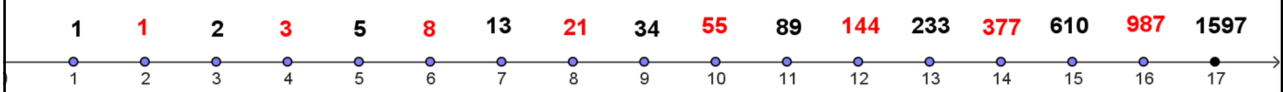
- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_3 = 2$
- $F_4 = 3$
- $F_5 = 5$
- $F_6 = 8$
- $F_7 = 13$
- $F_8 = 21$
- $F_9 = 34$
- $F_{10} = 55$
- $F_{11} = 89$
- $F_{12} = 144$
- $F_{13} = 233$
- $F_{14} = 377$
- $F_{15} = 610$
- $F_{16} = 987$
- $F_{17} = 1\,597$
- $F_{18} = 2\,584$
- $F_{19} = 4\,181$
- $F_{20} = 6\,765$
- $F_{21} = 10\,946$
- $F_{22} = 17\,711$
- $F_{23} = 28\,657$
- $F_{24} = 46\,368$
- $F_{25} = 75\,025$
- $F_{26} = 121\,393$
- $F_{27} = 196\,418$
- $F_{28} = 317\,811$
- $F_{29} = 514\,229$
- $F_{30} = 832\,040$
- $F_{31} = 1\,346\,269$
- $F_{32} = 2\,178\,309$
- $F_{33} = 3\,524\,578$
- $F_{34} = 5\,702\,887$
- $F_{35} = 9\,227\,465$
- $F_{36} = 14\,930\,352$
- $F_{37} = 24\,157\,817$
- $F_{38} = 39\,088\,169$
- $F_{39} = 63\,245\,986$
- $F_{40} = 102\,334\,155$

I numeri di Fibonacci con un linguaggio di programmazione (Python)

- Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Fibonacci.
- Programma (in Python) per ottenere l’n-esimo numero di Fibonacci
- Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Fibonacci

31

Proprietà 1. Somma dei primi *n* numeri di Fibonacci



$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Dimostrazione.

Si ha

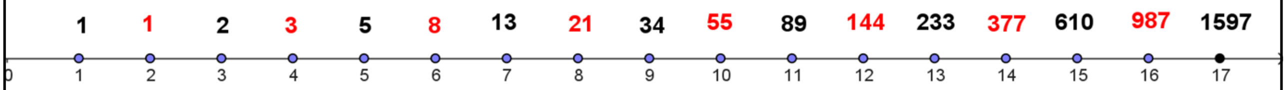
$$\begin{aligned}
u_1 &= u_3 - u_2 \\
u_2 &= u_4 - u_3 \\
u_3 &= u_5 - u_4 \\
&\vdots \\
u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n \\
u_n &= u_{n+2} - u_{n+1}
\end{aligned}$$

Sommando queste uguaglianze membro a membro, otteniamo

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - 1.$$

32

Proprietà 2. Somma dei primi *n* numeri di Fibonacci di posto **dispari**



$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Dimostrazione.

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 1 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_5 &= u_6 - u_4 \\ &\vdots \\ u_{2n-3} &= u_{2n-2} - u_{2n-4} \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2} \end{aligned}$$

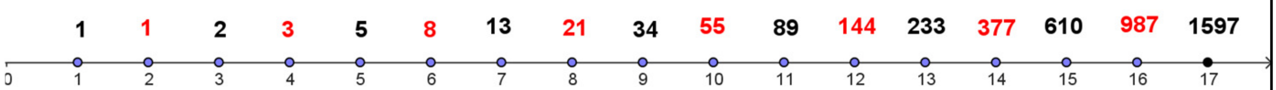
Sommando membro a membro otteniamo

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n} \; .$$

33

Proprietà 3. Somma dei primi *n* numeri di Fibonacci di posto **pari**

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$



Dimostrazione.

Per la (1) abbiamo

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

che possiamo scrivere

$$(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n-1}) + (u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n}) = u_{2n+2} - 1$$

e per la (2)

$$u_{2n} + (u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n}) = u_{2n+2} - 1$$

ossia

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n} + u_{2n+1} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \; .$$

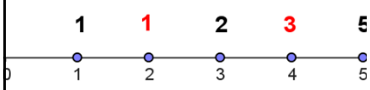
34

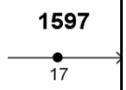
Proprietà 4. Somma dei **quadrati** dei primi *n* numeri di Fibonacci

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Dimostrazione.

Osserviamo che





$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2 \quad k \geq 2\ .$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= u_1 u_2 \\
u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\
u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\
&\vdots \\
u_{n-1}^2 &= u_{n-1} u_n - u_{n-1} u_{n-2} \\
u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n
\end{aligned}$$

che sommate membro a membro danno

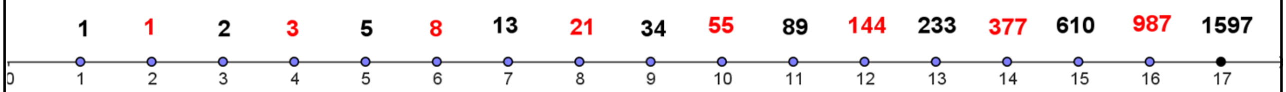
$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

35

Proprietà 5. Termine F_{m+n}

$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

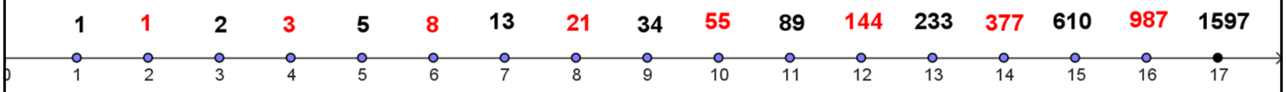
Dimostrazione (per induzione su n).



36

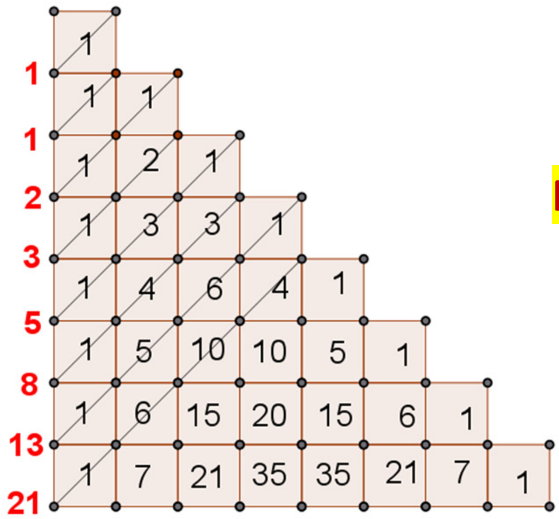
Proprietà 6. Quadrato del termine n-simo: F_n^2

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$



Dimostrazione (per induzione su n).

Dal triangolo di Tartaglia ai numeri di Fibonacci



Perché?

Il rapporto aureo

Si dice **rapporto aureo** (ingl. *golden ratio*) il rapporto tra due grandezze (in origine, due segmenti) tali che **la minore delle due sia media proporzionale tra la maggiore e la loro differenza** (o, equivalentemente, **la maggiore sia media proporzionale tra la somma e la minore**). Il rapporto aureo viene tradizionalmente indicato con la lettera greca φ o Φ.

Se $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ o equivalentemente $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, allora a e b stanno tra loro nel rapporto aureo, $\frac{a}{b} = \varphi$.

Il rapporto φ (lettera greca «f», da Fidia…)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli)

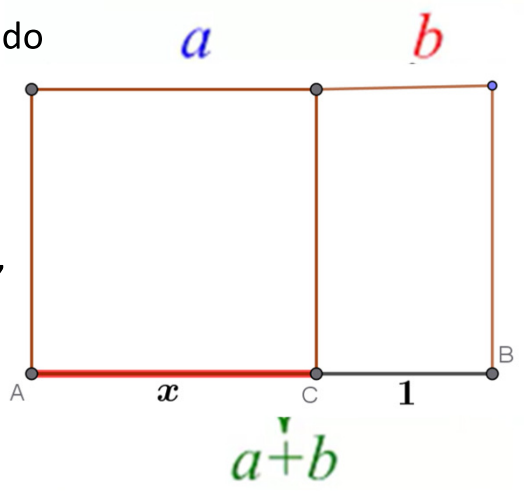
$$(a+b) : a = a : b$$

ponendo $a = x$ e $b = 1$ (**unità di misura**), vedi figura qui a fianco

$$\boldsymbol{(x+1) : x = x : 1}$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione: $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$



Il numero aureo φ (lettera greca «f», da Fidia)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione $(x+1):x = x:1$, ponendo $a = x$ e $b = 1$:

$$x^2 = x + 1$$

ossia, $x^2 - x - 1 = 0$, e vale

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ \ldots$$

Da $\varphi^2 = \varphi + 1$, derivano anche

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \cdots$$

e anche

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} = \cdots$$

Il numero aureo φ

Abbiamo visto che si può scrivere:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}}$$

$$= \cdots$$

Questa ultima relazione, al limite, diventa una frazione continua («infinita») e periodica.

Il numero φ scritto come frazione continua

Lo sviluppo di φ in frazione continua (infinita e periodica) è il seguente:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

ossia

$$\varphi = [1; 1].$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di φ

Possiamo quindi ricavare, dalla (*) moltiplicando per φ:

$\varphi^2 = \varphi + 1 = \mathbf{1}\varphi + \mathbf{1}$ **(*)**

$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = \mathbf{2}\varphi + \mathbf{1}$

$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi^3 + \varphi^2 = (2\varphi + 1) + \varphi + 1 = \mathbf{3}\varphi + \mathbf{2}$

$\varphi^5 = \varphi \cdot \varphi^4 = \varphi^4 + \varphi^3 = (3\varphi + 2) + 2\varphi + 1 = \mathbf{5}\varphi + \mathbf{3}$

$\varphi^6 = \varphi \cdot \varphi^5 = \varphi^5 + \varphi^4 = (5\varphi + 3) + 3\varphi + 2 = \mathbf{8}\varphi + \mathbf{5}$

…. e così via (occorre fare la dimostrazione per induzione).

In generale ($n > 1$): $\varphi^n = F_n\,\varphi + F_{n-1}$

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\boldsymbol{\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}}$$

Anche per la radice negativa ψ infatti si ha:

$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}$ **, e quindi:**

$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$

$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = 2\psi + 1 + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + 2$

$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = 3\psi + 2 + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + 3$

$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = 5\psi + 3 + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + 5$

e così via… In generale ($n > 1$):

$$\psi^n = F_n\psi + F_{n-1}$$

Formula generale

Abbiamo quindi ottenuto

$$\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

Indicando con ψ la soluzione negativa di $x^2 - x - 1 = 0$, si ha analogamente:

$$\psi^n = F_n\psi + F_{n-1}$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene:

$$\varphi^n - \psi^n = F_n(\varphi - \psi)$$

Osservato che $\varphi - \psi = \sqrt{5}$, si ricava la famosa **formula di Binet** (Jacques Philippe-Marie Binet, 1786-1856, matematico francese):

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

46

Formula di Binet

Poiché le soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e si ha $\varphi - \psi = \sqrt{5}$, sostituendo nella formula, si ottiene

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

si ottiene:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

47

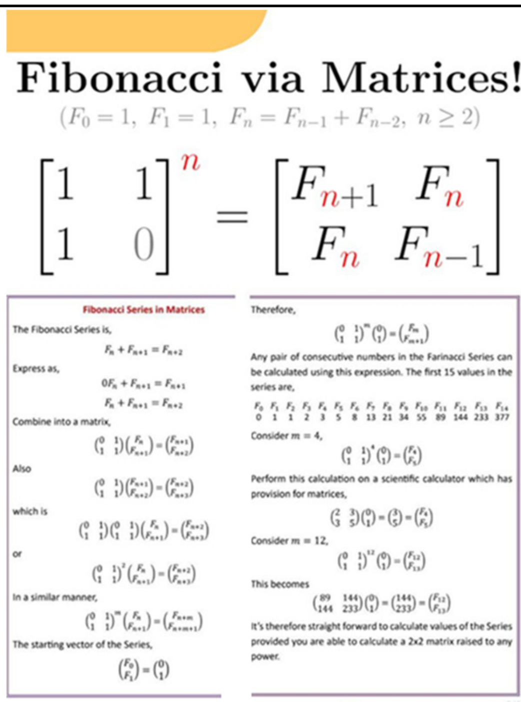
Numeri di Fibonacci ottenuti come potenze della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Si ha infatti:

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = A^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Si trova l'equazione caratteristica della matrice A e le sue soluzioni, risolvendo l'equazione $\det(A - \lambda I) = 0$:

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,\qquad$ che dà: $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

- Quindi gli autovalori della matrice A sono

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ossia φ e $\psi = -\frac{1}{\varphi}$.

Procedendo, si può trovare la formula di Binet in un altro modo, utilizzando le matrici e la diagonalizzazione.

49

Il limite del rapporto $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

Dalla formula di Binet, possiamo ricavare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Dividendo per φ^n al numeratore e al denominatore, si ottiene:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n}}$$

e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi,\quad$ perché $-1 < \frac{\psi}{\varphi} < 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n = 0.$

50

11-23 Fibonacci Day (animazione)

November, 23 - 11.23 - "φ-bonacci Day"

n = 1

$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$

51

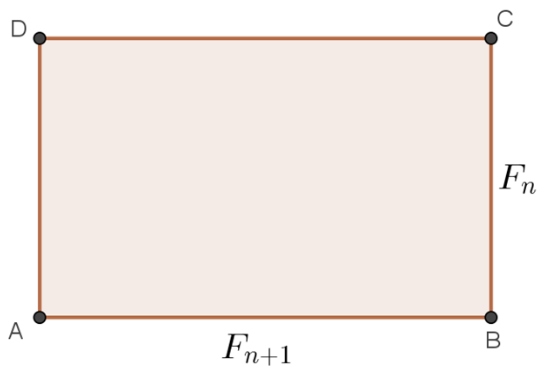
Significato geometrico del limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

- Il limite visto precedentemente

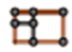
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

ha il seguente significato geometrico: **il rettangolo che ha per lati F_{n+1} ed F_n tende a diventare un rettangolo aureo**.



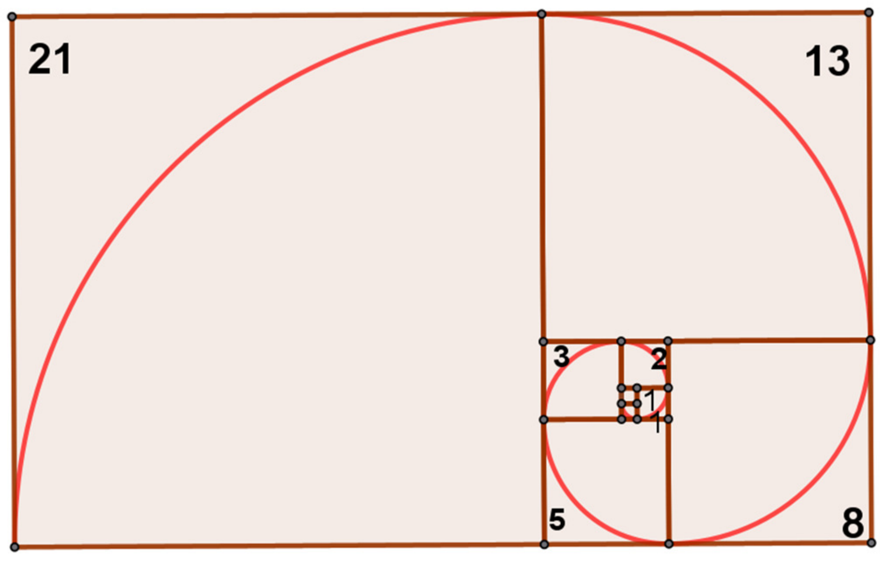
52

Spirale (pseudo)aurea con i numeri di Fibonacci



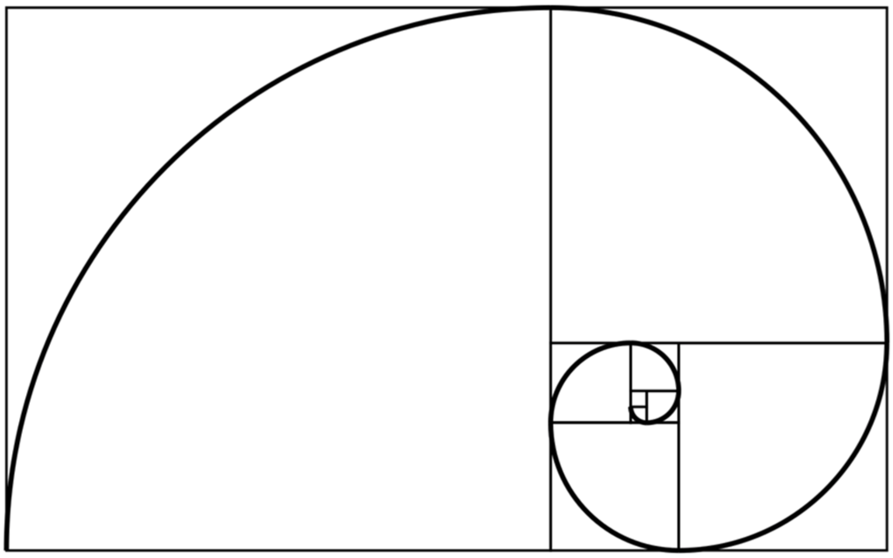
53

Spirale (pseudo)aurea con i numeri di Fibonacci



54

Spirale (pseudo)aurea con i numeri di Fibonacci



55

Rettangoli di Fibonacci con la geometria della tartaruga in Python

- Vedi questo programma in Python
- che disegna i quadrati che hanno per lati i successivi numeri di Fibonacci, in modo opportuno, per costruire una sequenza di rettangoli
- che hanno per lati due numeri di Fibonacci successivi, ossia $\boldsymbol{F_{n+1}}$ **ed** $\boldsymbol{F_n}$

56

Numeri di Lucas

- I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- Tele successione è definita ponendo

$$\boldsymbol{L_0 = 2,} \qquad \boldsymbol{L_1 = 1}$$

$$\boldsymbol{L_n = F_{n-1} + F_{n+1}} \text{ , per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- Si ha quindi, per esempio:

$$L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$$
$$L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$$
$$L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$$

$L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$, ...e così via.

57

Successione di Lucas

- Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

  2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843,...

- Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- Infatti: $L_{n-1} + L_{n-2} =$

$$= F_{n-2} + F_n + F_{n-3} + F_{n-1} = F_{n-1} + F_n + F_{n-1} =$$
$$= F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

58

I numeri di Lucas con un linguaggio di programmazione (Python)

- Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Lucas.
- Programma (in Python) per ottenere l'n-esimo numero di Lucas
- Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Lucas

59

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\boldsymbol{L_n} = F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi - \psi} =$$

$$= \frac{1}{\varphi - \psi}\left(\varphi^n\left(\frac{1}{\varphi} + \varphi\right) - \psi^n\left(\frac{1}{\psi} + \psi\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi - \psi}\left(\varphi^n(\varphi - \psi) - \psi^n(-\varphi + \psi)\right) = \boldsymbol{\varphi^n + \psi^n}.$$

60

Una formula per i numeri di Lucas

- Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \varphi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n\, L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\varphi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n + \psi^n) = F_n\, L_n$$

61

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- Dimostrare che $F_{2n} = F_n\, L_n$.
- Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?

62

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

2).
Provare che

$$u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}$$

dove u_n indica l'n-esimo numero di Fibonacci.

4). Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(u_n, L_n) \quad , \quad (u_{n+1}, L_{n+1}) \quad , \quad (u_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (u_{n+4}, L_{n+4}), dove u_n indica l'n-esimo numero di Fibonacci e L_n l'n-esimo numero di Lucas.

63

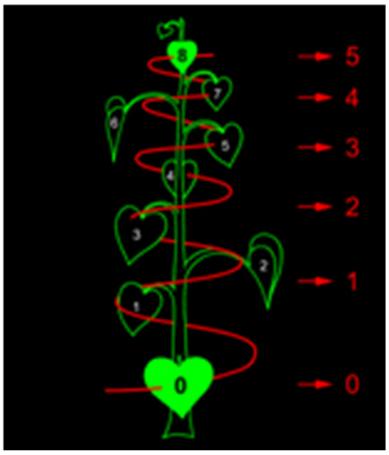
Numeri di Fibonacci e fillotassi

- La fillotassi è la disposizione spaziale delle foglie su un fusto, e la sequenza di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8...) si manifesta nella fillotassi attraverso l'angolo di posizionamento delle foglie.
- Questo angolo, vicino ai 137,5° (angolo aureo), minimizza l'ombreggiamento reciproco e massimizza l'esposizione alla luce, creando una spirale che segue rapporti matematici legati alla sequenza, come si osserva in molte piante, ad esempio girasoli e pigne.

64

Numeri di Fibonacci e fillotassi nelle piante

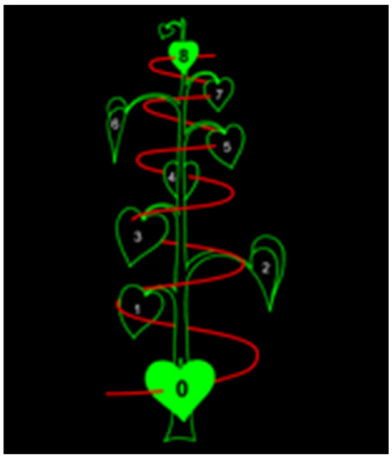
- La fillotassi è l'ordinamento delle foglie su un gambo o su di un ramo, o l'ordinamento dei semi o degli stami di alcuni fiori.
- Le foglie sui rami e i rami lungo il tronco tendono ad occupare posizioni che rendono massima l'esposizione al sole, alla pioggia, all'aria.
- Perciò un fusto verticale produce foglie e rami secondo schemi regolari.



65

Numeri di Fibonacci e fillotassi

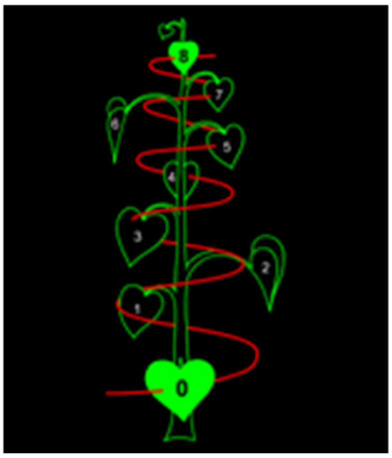
- La successione delle foglie e dei rami ha **una componente rotatoria** che, con l'avanzamento verso l'alto, traccia intorno al fusto un'elica immaginaria;
- partendo da una foglia qualunque, dopo uno, due, tre o cinque (2, 3, 5, …) giri dalla spirale si trova sempre una foglia allineata con la prima.
- A seconda della specie, questa sarà la seconda, la terza, la quinta, l'ottava, la tredicesima, etc.



66

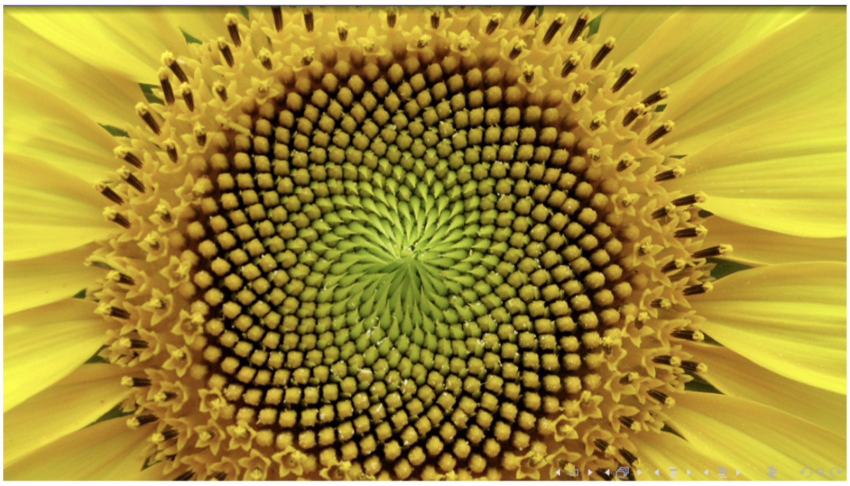
Numeri di Fibonacci e fillotassi

- Nell'esempio qui a destra la foglia allineata con la prima è l'ottava.
- Inoltre, il numero di giri compiuti per trovare la foglia allineata con la prima è generalmente un numero di Fibonacci; per il nostro esempio il numero di giri è 5.
- Il quoziente di fillotassi è il rapporto tra il numero di giri e il numero di foglie tra due foglie simmetriche: tale quoziente è quasi sempre il rapporto tra due numeri consecutivi o alternati della successione di Fibonacci.



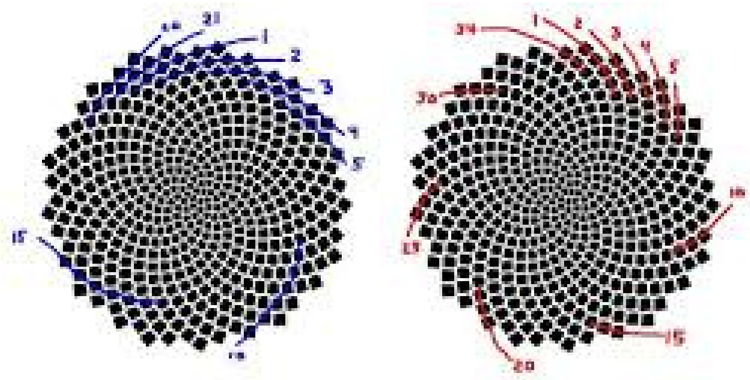
67

Numeri di Fibonacci e fillotassi nel girasole

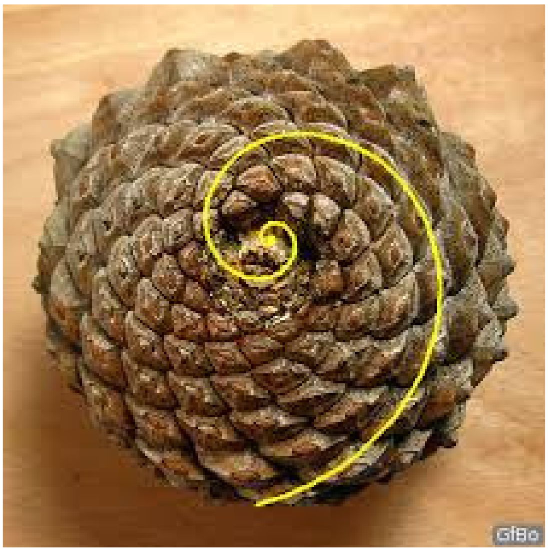


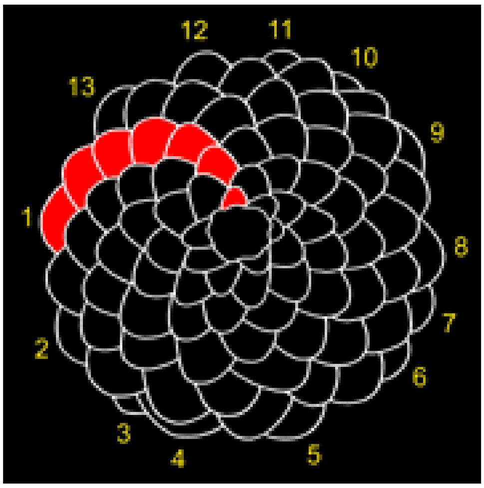
68

Numeri di Fibonacci e fillotassi nel girasole



Numeri di Fibonacci e fillotassi in una pigna





Numeri di Fibonacci e fillotassi nell'ananas

71

Spirali

72

73

Conclusioni

- Nel seminario ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- Come scritto nel sommario, si tratta di un tema molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

74

Grazie dell'attenzione.

Luigi Tomasi

Bibliografia

- V. Roselli, Matematiche elementari da un PVS, appunti del corso, UniFe, a.a. 2022-2023.
- S. Damantino, *Algebra*, Scienza Express 2023.
- N. Vorobiev, *Caractères de divisibilité. Suite de Fibonacci,* Editions Mir Moscou 1973
- Posamentier, Lehmann, *The (fabolous) Fibonacci Numbers*, Phrometeus Books.
- L. Catastini, F. Ghione, *La matematica che trasformò il mondo, Il* Liber Abbaci *di Leonardo Pisano detto Fibonacci*, Carocci, Roma, 2023.

76